

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

LUCIANA GANZAROLI PINHEIRO

**MÉTODOS SIMPLIFICADOS ADOTADOS POR NORMAS PARA ESTIMATIVA DE
FLECHAS EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO**

PROJETO DE CONCLUSÃO DE CURSO II

Niterói

2022

LUCIANA GANZAROLI PINHEIRO

**MÉTODOS SIMPLIFICADOS ADOTADOS POR NORMAS PARA ESTIMATIVA DE
FLECHAS EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO**

PROJETO DE CONCLUSÃO DE CURSO II

Projeto de Conclusão de Curso
apresentado ao curso de Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal
Fluminense, como requisito parcial para
conclusão do curso.

Orientadora:

Prof.^a Claudia Maria de Oliveira Campos – Professora Orientadora

Niterói

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE
Gerada com informações fornecidas pelo autor

P654m Pinheiro, Luciana Ganzaroli
Métodos simplificados adotados por normas para estimativa
de flechas em elementos estruturais de concreto armado /
Luciana Ganzaroli Pinheiro ; Claudia Maria de Oliveira Campos,
orientadora. Niterói, 2022.
60 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia
Civil)-Universidade Federal Fluminense, Escola de Engenharia,
Niterói, 2022.

1. Concreto armado. 2. Viga de concreto. 3. Produção
intelectual. I. Campos, Claudia Maria de Oliveira,
orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Escola de
Engenharia. III. Título.

CDD -

LUCIANA GANZAROLI PINHEIRO

**MÉTODOS SIMPLIFICADOS ADOTADOS POR NORMAS PARA ESTIMATIVA DE
FLECHAS EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal
Fluminense, como requisito parcial para
conclusão do curso.

Aprovada em 11 de fevereiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Claudia Maria de Oliveira Campos (Orientadora) - UFF

Prof. Claudio Ribeiro Carvalho – UFF

Prof. Osvaldo Luiz de Carvalho Souza – UFF

Niterói

2022

RESUMO

As análises de flechas nos elementos de concreto armado consistem nas considerações da não linearidade dos materiais, sendo de grande importância o entendimento do comportamento dos elementos durante os carregamentos. Diante da complexidade em aplicações de modelos mais refinados de elementos finitos ou outras análises criteriosas, as normas indicam que, para verificações a nível de projetos, podem-se aplicar métodos simplificados que estimam deflexões suficientemente adequadas. Dessa forma, este estudo consiste na avaliação das recomendações dadas pela norma brasileira NBR 6118:2014 em comparação com o código americano ACI 318-19, que sugerem diferentes métodos simplificados para cálculo de flechas, considerando as variações nos parâmetros. O trabalho realiza comparações com modelo refinado de elementos finitos e resultados de ensaios experimentais com vigas isostáticas e hiperestáticas. Como resultado, observa-se que flechas calculadas segundo recomendações da norma brasileira são inferiores às calculadas conforme o código americano, para vigas isostáticas e hiperestáticas. A comparação mostra que para taxas de armaduras mais baixas, inferiores a 1,0%, as divergências entre as normas são maiores.

Palavras-chave: flechas, vigas, concreto armado, métodos simplificados, rigidez à tração do concreto.

ABSTRACT

The analyses of deflections in reinforced concrete elements consist in the considerations of the nonlinearity of the materials, being of great importance to understand the behavior of the elements during loadings. Because of the complexity in applications of more refined finite element models or other analyses, the standards indicate that, for project level verifications, simplified methods that estimate sufficiently adequate deflections can be applied. Thus, this study consists in evaluating the recommendations given by the Brazilian standard NBR 6118:2014 in comparison with the American code ACI 318-19, which suggest different simplified methods for calculating deflections, considering variations in parameters. The work performs comparisons with refined finite element model and experimental test results with isostatic and hyperstatic beams. As a result, it is observed that deflections calculated according to the Brazilian standard recommendations are lower than those calculated according to the American code, for isostatic and hyperstatic beams. The comparison shows that for lower reinforcement ratios, less than 1.0%, the divergences between the standards are greater.

Keywords: deflections, beams, reinforced concrete, simplified methods, tension stiffening.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Seção retangular no Estádio I.....	16
Figura 2	Comportamento do concreto no Estádio II	18
Figura 3	Seção T com armadura dupla.....	19
Figura 4	Aparecimento das fissuras de flexão.....	20
Figura 5	Gráficos carga-deslocamento: Vigas Isostáticas e Vigas Hiperestáticas	21
Figura 6	Diagrama momento-curvatura com o efeito <i>tension stiffening</i>	22
Figura 7	Gráfico da comparação de flechas pelos dois métodos.....	22
Figura 8	Rigidez equivalente em vão de viga contínua.....	29
Figura 9	Sistema estático da viga D-0	32
Figura 10	Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (D-0).....	33
Figura 11	Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (D-0).....	33
Figura 12	Sistema estático das vigas B-N2, B-N3 e B-N4	34
Figura 13	Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (B-N2)	35
Figura 14	Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (B-N3)	35
Figura 15	Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (B-N4)	36
Figura 16	Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (B-N2)	36
Figura 17	Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (B-N3)	37
Figura 18	Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (B-N4)	37
Figura 19	Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (VA1-40).....	38
Figura 20	Sistema estático da viga VC-G114.....	39
Figura 21	Gráfico do momento-flecha: Métodos de cálculo x MEF (VC-G114).....	39
Figura 22	Sistema estático da viga VC-G323.....	40
Figura 23	Gráfico do momento-flecha: Métodos de cálculo x MEF (VC-G323).....	40
Figura 24	Sistema estático da viga VC-G512.....	41
Figura 25	Gráfico do momento-flecha: Métodos de cálculo x MEF (VC-G512).....	41
Figura 26	Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (D-0)	42
Figura 27	Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (B-N2)	43
Figura 28	Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (B-N3)	43
Figura 29	Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (B-N4)	44
Figura 30	Gráfico momento-flecha: vigas de Ashour (2000) x MEF.....	45
Figura 31	Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (VC-G114).....	46
Figura 32	Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (VC-G323).....	46

Figura 33	Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (VC-G512).....	47
Figura 34	Gráfico da relação $ACI > NBR$ em função da taxa de armadura no trecho 1	48
Figura 35	Gráfico da relação $ACI > NBR$ em função da taxa de armadura no trecho 2	48
Figura 36	Sistema estático da viga.....	52
Figura 37	Sistema estático de cálculo	52
Figura 38	Diagrama do momento fletor.....	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Valores do coeficiente ξ em função do tempo	25
Tabela 2	Limites para deslocamentos NBR 6118:2014.....	26
Tabela 3	Limites para deslocamentos ACI 318-19	28
Tabela 4	Parâmetros adotados nas normas.....	30
Tabela 5	Dados das vigas isostáticas	32
Tabela 6	Parâmetros adotados para a viga D-0.....	32
Tabela 7	Parâmetros adotados para as vigas B-N2, B-N3 e B-N4.....	34
Tabela 8	Momentos de inércia fissurados das vigas B-N2, B-N3 e B-N4.....	34
Tabela 9	Dados das vigas hiperestáticas	38
Tabela 10	Parâmetros adotados para a viga VC-G114.....	39
Tabela 11	Parâmetros adotados para a viga VC-G323.....	40
Tabela 12	Parâmetros adotados para a viga VC-G512.....	41
Tabela 13	Valores médios e desvios padrão das flechas das vigas isostáticas.....	44
Tabela 14	Relações das flechas calculadas vigas isostáticas: NBR x ACI	45
Tabela 15	Valores médios e desvios padrão das flechas das vigas hiperestáticas	47
Tabela 16	Relações das flechas calculadas vigas hiperestáticas: NBR x ACI.....	47

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	<i>American Concrete Institute</i>
CEB	<i>Comite Euro-international du Beton</i>
ELS	Estado Limite de Serviço
ELS-DEF	Estado Limite de Deformação
ELU	Estado Limite Último
LN	Linha Neutra
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR	Norma Brasileira

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	13
1.2	SITUAÇÃO PROBLEMA	13
1.3	OBJETIVOS DA PESQUISA	14
1.3.1	OBJETIVO GERAL	14
1.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
1.4	ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	ANÁLISE DE FLECHAS EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO	16
2.1.1	ESTÁDIO I.....	16
2.1.2	ESTÁDIO II.....	17
2.1.3	COMPORTAMENTO DOS ELEMENTOS	20
2.1.4	EFEITO <i>TENSION STIFFENING</i>	21
2.2	NORMAS EM ESTUDO	23
2.2.1	NBR 6118:2014 – PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO.....	23
2.2.2	ACI 318-19 – <i>BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR STRUCTURAL CONCRETE</i>	27
2.2.3	CONSIDERAÇÕES DA RIGIDEZ EQUIVALENTE PARA VIGAS CONTÍNUAS 29	
2.3	COMPARAÇÃO DAS NORMAS SELECIONADAS.....	30
3	METODOLOGIA.....	31
3.1	ENSAIOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS	31
3.2	VIGAS ISOSTÁTICAS	32
3.2.1	VIGA D-0 (DU E TAO, 1985).....	32
3.2.2	VIGAS B-N2, B-N3 E B-N4 (ASHOUR, 2000).....	34
3.3	VIGAS HIPERESTÁTICAS.....	38
3.3.1	VIGA VC-G114 (JUNGES, 2011).....	39
3.3.2	VIGA VC-G323 (JUNGES, 2011).....	40
3.3.3	VIGA VC-G512 (JUNGES, 2011).....	41
3.4	ANÁLISE DOS RESULTADOS	42
4	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	49
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50

ANEXO A - EXEMPLO PRÁTICO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLIFICADO PARA CÁLCULO DE FLECHAS SEGUNDO A NBR 6118:2014	52
A.1. DADOS DA VIGA EM ANÁLISE	52
A.2. COMBINAÇÃO EM SERVIÇO	53
A.3. VERIFICAÇÃO DO ESTÁDIO DA SEÇÃO.....	53
A.3.1. MOMENTOS MÁXIMOS ATUANTES	53
A.3.2. MOMENTO DE FISSURAÇÃO.....	53
A.4. RIGIDEZ EQUIVALENTE	54
A.4.1. MÓDULO DE ELASTICIDADE SECANTE.....	54
A.4.2. LINHA NEUTRA DA SEÇÃO FISSURADA (VÃO)	54
A.4.3. MOMENTO DE INÉRCIA FISSURADO (VÃO).....	54
A.4.4. LINHA NEUTRA DA SEÇÃO FISSURADA (APOIO).....	55
A.4.5. MOMENTO DE INÉRCIA FISSURADO (APOIO)	55
A.4.6. FÓRMULA DA RIGIDEZ EQUIVALENTE	55
A.5. VERIFICAÇÃO DA TENSÃO NO CONCRETO	55
A.6. CONSIDERAÇÕES DA RIGIDEZ EQUIVALENTE PARA VIGAS CONTÍNUAS	56
A.6.1. RIGIDEZ DO TRECHO DE MOMENTO POSITIVO.....	56
A.6.2. RIGIDEZ EQUIVALENTE DO TRECHO DE MOMENTO NEGATIVO	56
A.6.3. FÓRMULA DA RIGIDEZ PONDERADA	56
A.7. CÁLCULO DA FLECHA IMEDIATA	57
A.7.1. FLECHA IMEDIATA (NBR 6118:2014).....	57
A.7.2. FLECHA IMEDIATA (IBRACON, 2015)	57
A.8. CÁLCULO DA FLECHA DIFERIDA	57
A.9. VERIFICAÇÃO DA FLECHA LIMITE	58

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os elementos estruturais em concreto armado são dimensionados respeitando-se os limites definidos nas análises no Estado Limite Último (ELU), para verificação da segurança, e no Estado Limite de Serviço (ELS), para garantir o desempenho do elemento, visando conforto e durabilidade durante a utilização. Com o desenvolvimento dos materiais e das técnicas de construção, as estruturas de concreto armado estão cada vez mais esbeltas, apresentando vãos e carregamentos maiores. Assim, é indispensável que as verificações do comportamento em serviço dos elementos sejam realizadas de forma precisa.

Dentro das análises do ELS, é definido pelas normas e códigos que seja realizado o controle das deformações excessivas (ELS-DEF), o estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para o uso normal da estrutura. Sendo assim, é essencial a aplicação de análises criteriosas para garantir o comportamento adequado durante sua vida útil, sem que ocorram indícios de instabilidade, fissuras aparentes, fortes vibrações e danos aos elementos, prejudicando o uso.

A determinação das flechas nos elementos de concreto armado é realizada por meio de análises com definição de diversos parâmetros, referentes às características dos materiais, concreto e aço, e às condições de vinculação dos elementos. Para o desenvolvimento de projetos é recomendado aplicação de métodos simplificados para os cálculos de flechas, dispensando o emprego de modelos mais complexo de análises, como os de elementos finitos (MEF).

1.2 SITUAÇÃO PROBLEMA

A aplicação de métodos simplificados, quando comparados a modelos mais refinados, tem demonstrado estimativas aceitáveis, que podem ser adotadas a fim de simplificar os cálculos, considerando o comportamento não linear a que os elementos estão submetidos.

A norma brasileira NBR 6118:2014 adota como método de cálculo a formulação desenvolvida por Branson (1965), em contrapartida, o código americano ACI 318-19, em sua última atualização, recomenda a aplicação do estudo proposto por Bischoff (2005, 2007).

Diante disso, tornam-se necessários estudos comparativos para os diferentes métodos, sendo de grande importância que esta comparação envolva modelos com ensaios laboratoriais e experimentos numéricos, garantindo, assim, previsões o mais precisas possível para as deflexões.

1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

1.3.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é comparar as recomendações para os cálculos de flecha recomendados pela norma brasileira NBR 6118:2014 e pelo código americano ACI 318-19, para verificações no estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF).

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender o comportamento dos elementos de concreto armado e os fundamentos de análise para determinação das flechas, estabelecidos nas normas;
- Revisar resultados de ensaios e modelos numéricos encontrados na literatura para a determinação de flechas em vigas de concreto armado, aplicando os métodos recomendados pela norma brasileira e pelo código americano;
- Analisar vigas isostáticas e hiperestáticas, com seção retangular e tipos de carregamentos variados, observando diferentes taxas de armadura.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

No Capítulo 2 são desenvolvidas as bases teóricas acerca do comportamento do concreto armado durante a aplicação de carregamentos. São estudados os cálculos recomendados para determinação das deflexões em vigas, apresentando os estádios que marcam como a análise deve ser realizada, em função do grau de fissuração e variação do comportamento, ora linear ora não linear, dos elementos estruturais. Ainda neste capítulo é apresentado o conceito do efeito *tension stiffening*, que influencia diretamente no cálculo da rigidez dos elementos fissurados, abordando brevemente revisões teóricas dos métodos recomendados pelas normas em estudo.

Partindo dos fundamentos estudados, são apresentadas as formulações dos métodos simplificados recomendados pela NBR 6118:2014 e pelo ACI 318-19, abordando as diferenças consideradas em relação aos parâmetros de cálculos e determinação dos limites para flechas estabelecidos.

O Capítulo 3 apresenta estudos comparativos encontrados na literatura com exemplos de ensaios para vigas isostáticas e exemplos numéricos para as vigas hiperestáticas, contemplando aplicação analítica e modelo refinado de elementos finitos para as comparações, em que também são discutidos os resultados.

No Anexo A é apresentado um exemplo prático de cálculo das deformações, para uma viga hiperestática, de acordo com as recomendações da norma brasileira.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 ANÁLISE DE FLECHAS EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

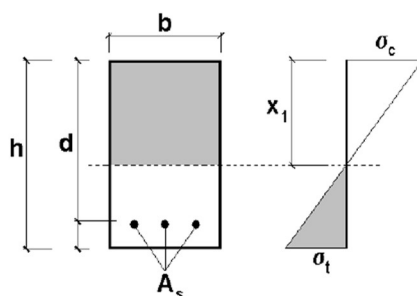
As peças de concreto armado quando submetidas à esforços de flexão simples apresentam três fases de comportamento, denominados estádios I, II e III, que abrangem o início do carregamento até a condição de estado limite último, relacionado a ruína estrutural. Como consequência do aumento de carga, os níveis de tensão nas seções da viga em análise aumentam e, junto ao aparecimento das fissuras e ao escoamento da armadura, são definidos cada um dos estádios, conforme as descrições seguintes.

2.1.1 ESTÁDIO I

A primeira fase do comportamento é caracterizada pelo início do carregamento, quando as cargas são de baixa intensidade e não surgem fissuras viga, sendo o concreto capaz de resistir às tensões de tração. Enquanto as tensões permanecem inferiores à resistência à tração na flexão do concreto, tem-se o diagrama linear das tensões ao longo da seção transversal analisada (Pinheiro, 2007). Admite-se, assim, que o concreto e a armadura se comportam de forma elástica e linear, sendo as tensões nas fibras mais comprimidas proporcionais às deformações.

Para determinar a rigidez da seção neste estádio, a NBR 6118:2014 adota no cálculo do momento de inércia a homogeneização da seção, considerando assim a parcela de contribuição do aço, pela relação entre os módulos de elasticidade do concreto e do aço (α_e). Com base na Figura 1 e na relação de compatibilidade, para o cálculo da posição da linha neutra (x_1), considera-se o momento estático da seção igual a zero, obtendo-se a equação a seguir.

Figura 1 Seção retangular no Estádio I



Fonte: Pinheiro (2007).

$$\alpha_e = E_s/E_{cs} \quad (2.1)$$

$$x_I = \frac{b \frac{h^2}{2} + (\alpha_e - 1)A_s d}{bh + (\alpha_e - 1)A_s} \quad (2.2)$$

b a largura da seção;

h a altura da seção;

d a altura útil;

A_s a área da armadura de tração;

α_e a relação entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto.

Logo, para a seção retangular apresentada, o momento de inércia é obtido segundo a equação 2.3.

$$I_I = \frac{bh^3}{12} + bh \left(x_I - \frac{h}{2} \right)^2 + (\alpha_e - 1)A_s(d - x_I)^2 \quad (2.3)$$

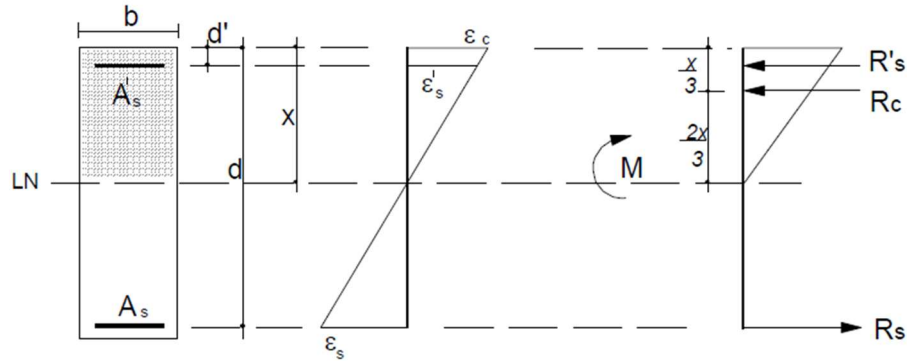
Leonhardt (1971) indica que para elementos com taxas de armaduras superiores a 0,50% seja considerada a seção homogeneizada, já para peças com taxas menores que esta pode-se adotar a seção bruta de concreto. De acordo com o autor pode-se desprezar a armadura de compressão nos casos de taxas inferiores a 0,40%, importantes nas deformações lentas para taxas de armaduras maiores.

2.1.2 ESTÁDIO II

Com o aumento dos carregamentos no elemento, surgem as primeiras fissuras de flexão nos trechos em que a resistência à tração do concreto for alcançada, assim, a contribuição do concreto é desprezada. Contudo, a área de concreto que sofre compressão, acima da linha neutra, mantém o diagrama linear de tensões (Pinheiro, 2007).

Pela Figura 2, observa-se as tensões no concreto no nível da armadura, obtendo as equações de compatibilidade, pela consideração que o aço e o concreto trabalham no regime elástico linear.

Figura 2 Comportamento do concreto no Estádio II



Fonte: Guimarães (2014).

Pela definição da relação entre os módulos de elasticidade dos materiais e a consideração que os mesmos trabalham no regime elástico linear, temos as tensões:

$$\sigma'_s = \alpha_e \frac{(x - d')}{x} \sigma_c \quad (2.4)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \frac{(d - x)}{x} \sigma_c \quad (2.5)$$

Partindo da equação de equilíbrio da seção (eq. 2.6), tem-se a posição da linha neutra (x_{II}) para a seção retangular (eq. 2.7):

$$R_s = R'_s + R_c \quad (2.6)$$

$$x_{II} = -\frac{\alpha_e(A_s + A'_s)}{b} + \sqrt{\left[\frac{\alpha_e(A_s + A'_s)}{b}\right]^2 + \frac{2\alpha_e(A_s d + A'_s d')}{b}} \quad (2.7)$$

Assim, considerando para o equilíbrio de momentos fletores na seção, que o momento fletor solicitante deve ser equilibrado com o momento fletor resistente, é possível determinar a tensão no concreto, obtendo-se com precisão o momento de inércia da seção fissurada homogeneizada (I_{II}), representada pelo denominador da eq. 2.8:

$$\sigma_c = \frac{M x_{II}}{\frac{b_w x_{II}^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 + \alpha_e A'_s (x_{II} - d')^2} \quad (2.8)$$

$$I_{II} = \frac{b_w x_{II}^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 + \alpha_e A'_s (x_{II} - d')^2 \quad (2.9)$$

As tensões nas armaduras comprimida e tracionada podem ser determinadas, então, pelas relações obtidas acima quando substituídas nas equações 2.4 e 2.5.

$$\sigma'_s = \alpha_e \frac{M (x - d')}{I_{II}} \quad (2.10)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \frac{M (d - x)}{I_{II}} \quad (2.11)$$

Com base nos resultados, obtemos as deformações no concreto (ε_c) e nas armaduras comprimida (ε'_s) e tracionada (ε_s), permitindo a determinação da curvatura (M/EI) para melhor entendimento do comportamento dos elementos no Estádio II.

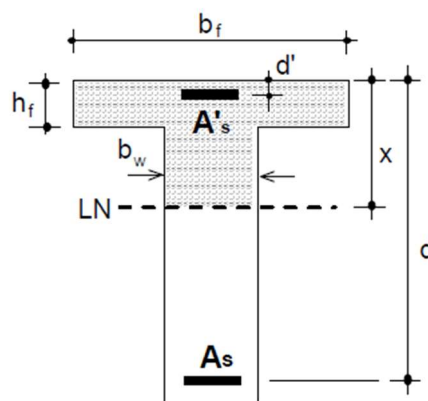
$$\varepsilon_c = \frac{M x_{II}}{E_c I_{II}} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon'_s = \frac{M (x_{II} - d')}{E_c I_{II}} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_s = \frac{M (d - x)}{E_c I_{II}} \quad (2.14)$$

Nos casos em que são analisadas seções T com armadura dupla, emprega-se, inicialmente, a equação 2.7 para determinar a condição da posição da linha neutra, considerando $b_w = b_f$, segundo Figura 3.

Figura 3 Seção T com armadura dupla



Fonte: Guimarães (2014).

Nas situações em que a linha neutra for menor ou igual a altura da mesa ($x_{II} \leq h_f$), então a seção será tratada como retangular com altura d e largura b_f . Se a zona comprimida atingir a alma ($x_{II} > h_f$) a seção será tratada como T, obtendo-se a equação 2.15 para o cálculo da linha neutra, conforme procedimento especificado para seção retangular (Guimarães, 2014).

$$b_w x_{II}^2 + 2x_{II} \left[h_f (b_f - b_w) + \alpha_e (A_s + A'_s) \right] = h_f^2 (b_f - b_w) + 2 \alpha_e (A_s d + A'_s d') \quad (2.15)$$

Dessa forma, o momento de inércia fissurado será de acordo com a equação 2.16.

$$I_{II} = \frac{b_f h_f^3}{12} + b_f h_f \left(x - \frac{h_f}{2} \right)^2 + \frac{b_w (x - h_f)^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 + \alpha_e A'_s (x_{II} - d')^2 \quad (2.16)$$

Nos estados limites de serviço os elementos trabalham em parte no Estádio I e em parte no Estádio II (Figura 4). De acordo com Pinheiro (2007), o que separa o Estádio I do Estádio II é o momento de fissuração, calculado de acordo com as determinações normativas, a ser descrito na seção 2.2 deste trabalho.

Figura 4 Aparecimento das fissuras de flexão



Fonte: Leonhardt (1979).

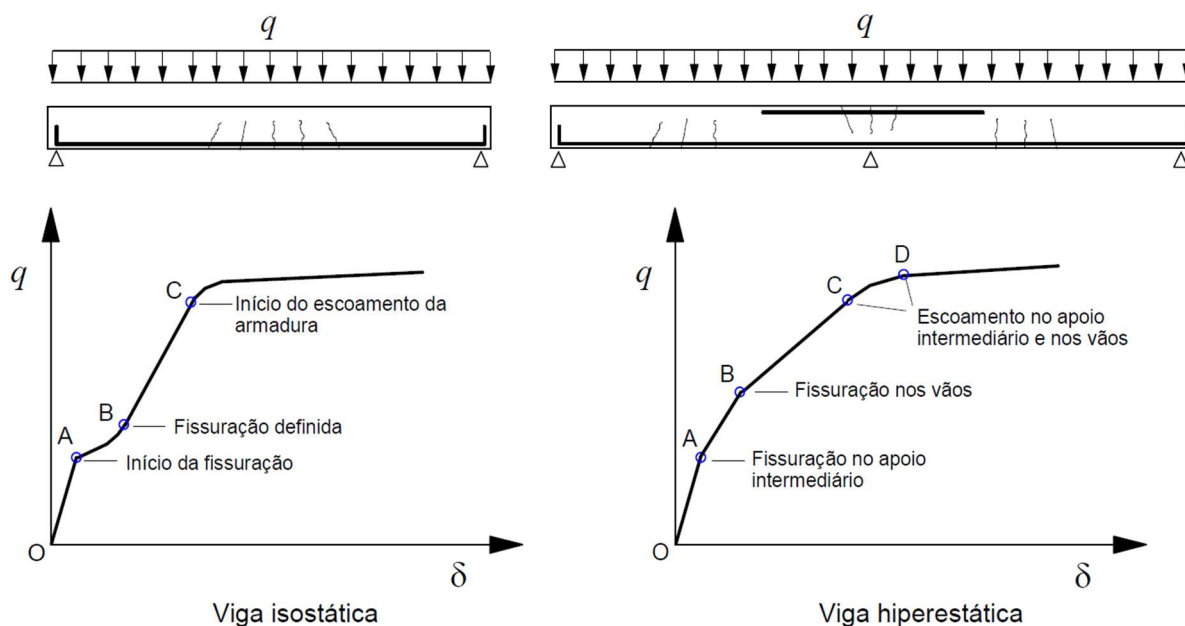
A determinação das tensões no concreto e no aço por meio das equações 2.8, 2.10 e 2.11 apresentadas acima, permite que a aplicação dos métodos simplificados seja admissível, garantindo que a seção em análise terá relação linear entre tensões e deformações.

A NBR 6118:2014 define que para tensões inferiores à $0,5f_c$, sendo f_c a resistência à compressão do concreto, pode-se admitir a relação linear. Da mesma forma, o código ACI 318-19, estabelece o limite em $0,6f_c$. A partir das tensões limite, admite-se que o diagrama de tensões seja da forma parabólico-retangular, observando a plastificação da zona comprimida e o concreto está próximo de atingir a ruptura (Pinheiro, 2007), entrando no Estádio III.

2.1.3 COMPORTAMENTO DOS ELEMENTOS

A Figura 5 mostra a resposta carga-deslocamento no meio do vão para vigas isostáticas e para vigas hiperestáticas. Os trechos iniciais O-A são linear por não haver fissuração, caracterizando o Estádio I.

Figura 5 Gráficos carga-deslocamento: Vigas Isostáticas e Vigas Hiperestáticas



Fonte: Guimarães (2014).

Para a viga isostática a fissuração inicia no ponto A e a partir daí, outras fissuras se formam até a carga atingir o valor correspondente ao ponto B, quando a configuração das fissuras praticamente se define. O trecho B-C é praticamente linear, pois a tensão no concreto não é muito elevada e a tensão na armadura é inferior à tensão de escoamento (Guimarães, 2014), contudo, a rigidez é menor, como demonstrado anteriormente. O ponto C marca o início do escoamento da armadura, caracterizando esgotamento da capacidade de carga do elemento (Estádio III).

Para a viga hiperestática ocorre redução da rigidez inicialmente com a fissuração no apoio intermediário, no trecho A-B. A partir do ponto B a diminuição é ainda maior devido à fissuração nos vãos. Os pontos C e D marcam o início do escoamento das armaduras negativa e positiva, respectivamente.

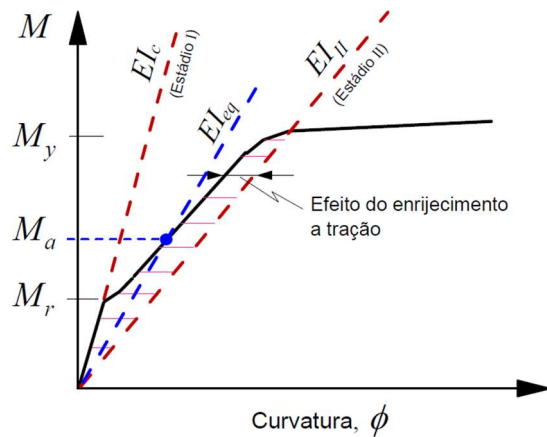
2.1.4 EFEITO *TENSION STIFFENING*

O diagrama momento-curvatura característico, observado na Figura 6, distingue também as regiões apresentadas anteriormente em função da solicitação na seção.

Como explica Morelli (2017), admite-se que a determinação da rigidez de uma seção de concreto armado é influenciada pelo efeito *tension stiffening*, fenômeno que leva a um aumento na rigidez, devido à transmissão de tensões da barra para o concreto, pela aderência,

entre duas fissuras adjacentes. Sendo a contribuição do concreto evidenciada pela área entre as curvas do comportamento de uma barra isolada (linha tracejada que representa EI_{II} – Estádio II) com relação ao conjunto concreto e aço (reta contínua), marcado no gráfico.

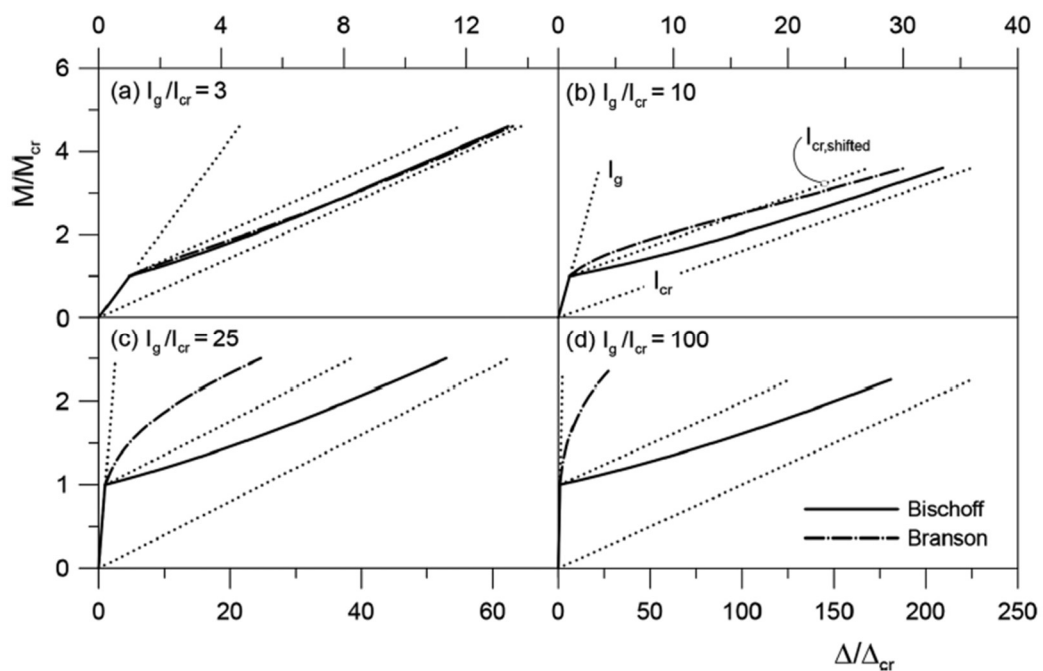
Figura 6 Diagrama momento-curvatura com o efeito *tension stiffening*



Fonte: Guimarães (2014).

Pinheiro (2020) apresentou um estudo acerca do tema, em que foram analisados os métodos simplificados propostos pela NBR 6118:2014, método clássico de Branson (1965), e pelo ACI 318-19, método desenvolvido por Bischoff (2005, 2007, 2020).

Figura 7 Gráfico da comparação de flechas pelos dois métodos



Fonte: Bischoff (2020).

Devido às diferenças na determinação da parcela de rigidez do efeito *tension stiffening*, ficou evidenciado que o método de Branson (1965) tende a ser menos conservador quando aplicado, principalmente, para taxas de armaduras inferiores à 0,60%, em comparação às aproximações adotadas por Bischoff (2005, 2007, 2020), que são baseadas no conceito de que o momento ou curvatura, devido ao efeito *tension stiffening*, diminui com o aumento do carregamento, após o início da fissuração.

De acordo com a Figura 7 observa-se os resultados para exemplos dos métodos. A razão $I_g/I_{cr} = 3,0$ corresponde a taxas de 1,00%, referentes às vigas moderadamente reforçadas, $I_g/I_{cr} = 10,0$ representa taxas de 0,23%, indicando lajes armadas em uma direção levemente reforçadas, e a relação $I_g/I_{cr} = 25,0$ está associada a taxas ainda menores, como elementos de paredes, finos e inclinados. Situações com $I_g/I_{cr} = 100$ são hipotéticas, para demonstração da tendência dos métodos. Neste caso, I_g é o momento de inércia da seção bruta e I_{cr} é o momento de inércia da seção fissurada.

Nesta análise, constatou-se que pelo método de Branson (1965), para taxas mais baixas, são obtidos resultados para deflexões bem menores, sendo menos conservador, que quando aplicado o método de Bischoff (2005, 2007, 2020).

2.2 NORMAS EM ESTUDO

A determinação de flechas em vigas de concreto armado pode ser realizada utilizando-se diferentes métodos de aproximação, a partir de parâmetros em comum, como a seção transversal homogeneizada da viga, o momento de inércia efetivo, considerando a influência dos efeitos da fissuração no concreto e o momento de fissuração, como no caso das referências normativas apresentadas a seguir.

2.2.1 NBR 6118:2014 – PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO

O processo de cálculo recomendado pela norma brasileira é baseado no método de Branson (1965), em que o autor considera um momento de inércia equivalente, sendo determinado por uma média ponderada entre o Estádio I e o Estádio II puro. A seguir está descrita a expressão de rigidez equivalente (EI_{eq}) que representa a condição do concreto, apresentada no item 17.3.2.1.1 da norma:

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (2.17)$$

I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;

M_a é o momento fletor na seção mais solicitada;

M_r é o momento fissurado, recomenda-se reduzir à metade para barras lisas;

E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto.

Sendo:

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad (2.18)$$

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3}, \text{ para } f_{ck} \text{ de 20MPa a 50MPa} \quad (2.19)$$

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad (2.20)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (2.21)$$

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}}, \text{ para } f_{ck} \text{ de 20MPa a 50MPa} \quad (2.22)$$

α é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração na tração direta ($\alpha = 1,2$, para seções T ou duplo T e $\alpha = 1,5$, para seções retangulares);

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto;

α_E é o parâmetro do agregado;

α_i é o parâmetro do módulo de deformação.

A determinação do momento de inércia fissurado (I_{II}) é feita por meio do cálculo da posição da linha neutra (x_{II}) na seção, como apresentado no item 2.1.2 deste relatório, representado pelas equações 2.7 e 2.9.

A determinação do deslocamento imediato, de acordo com o proposto pela norma brasileira, é realizada em função do tipo e grandeza do carregamento aplicado, do comprimento do vão, das condições de apoio da viga, assim como as propriedades geométricas e características dos materiais. A expressão empregada está descrita abaixo:

$$\delta = \frac{K}{384} \frac{pl^4}{(EI)_{eq}} \quad (2.23)$$

K é um fator tabelado que depende da vinculação e do tipo de carregamento;

p é o carregamento;

l é o vão;

$(EI)_{eq}$ é a rigidez equivalente à flexão (eq. 2.17).

A flecha adicional diferida no tempo é calculada pelo produto da flecha imediata pelo fator α_f , determinado como mostrado pelas expressões a seguir.

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (2.24)$$

$$\rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (2.25)$$

A_s' é a armadura de compressão, no caso de armadura dupla;

b é a largura da seção transversal;

d é a altura útil;

ξ é o coeficiente função do tempo, obtido pela Tabela 1 ou calculado por:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (2.26)$$

$$\xi(t) = 0,68 (0,996^t)t^{0,32}, \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (2.27)$$

$$\xi(t) = 2, \text{ para } t > 70 \text{ meses} \quad (2.28)$$

$$t_0 = \frac{\sum P_i t_{0i}}{\sum P_i} \quad (2.29)$$

t o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

P_i representa as parcelas de carga;

t_0 é a idade em que se aplicou cada parcela P_i , expressa em meses.

Tabela 1 Valores do coeficiente ξ em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	≥ 70
Coeficiente $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: NBR 6118:2014 (item 17.3.2.1.2).

O valor da flecha total deve ser obtido multiplicando a flecha imediata por $(1 + \alpha_f)$.

Para os valores de deslocamentos limite, a norma brasileira considera o tipo de efeito que ocorre na edificação e atribui valores a fim de proporcionar um comportamento adequado da estrutura em serviço. Os valores estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 Limites para deslocamentos NBR 6118:2014

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento-limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$l/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$l/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total	$l/250^a$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$l/350 + \text{contraflecha}^b$
			Ocorrido após a construção do piso	$l/600$
Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após a construção do equipamento	De acordo com recomendação do fabricante do equipamento	
Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Após a construção da parede	$l/500^c$ e 10 mm e $\theta = 0,0017 \text{ rad}^d$
		Divisórias leves e caixilhos telescópios	Ocorrido após a instalação da divisória	$l/250^c$ e 25 mm
		Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação frequente ($\Psi_1 = 0,30$)	$H/1700$ e $H_i/850^e$ entre pavimentos ^f
		Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	$l/400^g$ e 15 mm
	Forros	Movimentos térmicos horizontais	Provocado por diferença de temperatura	$H_i/500$
		Revestimentos colados	Ocorridos após a construção do forro	$l/350$
		Revestimentos pendurados com juntas	Deslocamento ocorrido após a construção do forro	$l/175$
	Pontes rolantes	Desalinhamento de trilhos	Deslocamento provocado pelas ações decorrentes da frenagem	$H/400$
	Efeitos em elementos estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados incorporando-os ao modelo estrutural adotado.	

^a As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água.

^b Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que $l/350$.

^c O vão l deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.

^d Rotação nos elementos que suportam paredes.

^e H é a altura total do edifício e H_i o desnível entre dois pavimentos vizinhos.

^f Esse limite aplica-se ao deslocamento lateral entre dois pavimentos consecutivos, devido à atuação de ações horizontais. Não podem ser incluídos os deslocamentos devidos a deformações axiais nos pilares. O limite também se aplica ao deslocamento vertical relativo das extremidades de lintéis conectados a duas paredes de contraventamento, quando H_i representa o comprimento do lintel.

^g O valor l refere-se à distância entre o pilar externo e o primeiro pilar interno.

NOTAS

1 Todos os valores-limites de deslocamentos supõem elementos de vão l suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.

2 Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o valor l é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se esse valor a duas vezes o vão menor.

3 O deslocamento total deve ser obtido a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes definidos na Seção 11.

4 Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contraflechas.

Fonte: NBR 6118:2014 (item 13.3).

2.2.2 ACI 318-19 – BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR STRUCTURAL CONCRETE

O código americano ACI 318-19 recomenda a aplicação do estudo desenvolvido por Bischoff (2005, 2007), em que para o cálculo do momento de inércia efetivo utilizam-se as equações 2.30 e 2.31:

$$I_e \approx \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{\frac{2}{3}M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right)}, \text{ para } M_a > \frac{2}{3}M_{cr} \quad (2.30)$$

$$I_e = I_g, \text{ para } M_a \leq \frac{2}{3}M_{cr} \quad (2.31)$$

I_g é o momento de inércia da seção bruta;

I_{cr} é o momento de inércia da seção fissurada;

M_a é o momento fletor na seção mais solicitada;

M_{cr} é o momento de fissuração.

Para o cálculo do momento de inércia fissurado (I_{cr}), momento fissurado (M_{cr}), momento de serviço (M_a) e momento de inércia da seção bruta (I_g), que compõem a equação 2.30, são adotados os mesmos procedimentos apresentados no item 2.2.1. Os parâmetros para o concreto estão apresentados a seguir:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad (2.32)$$

$$f_r = 0,623 \lambda \sqrt{f'_c} \quad (2.33)$$

$$E_c = \begin{cases} 4700\sqrt{f'_c} & \text{para } f'_c \leq 40MPa \\ \left(3320\sqrt{f'_c} + 6895\right) \cdot (\gamma_{conc}/2320)^{1,5} & \text{para } f'_c > 40MPa \end{cases} \quad (2.34)$$

λ depende do peso específico do concreto, para concretos de peso específico normal pode-se considerar $\lambda = 1$;

f_r é a resistência a ruptura do concreto;

I_g é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

γ_{conc} é um fator que depende da densidade do concreto, para concretos com peso específico normal adota-se $\gamma_{conc} = 1$;

f'_c é a resistência característica à compressão do concreto.

A flecha imediata é obtida por meio da equação abaixo:

$$\delta = K \frac{Ml^2}{E_c I_e} \quad (2.35)$$

K é um fator que depende da vinculação e do tipo de carregamento;

M é o momento fletor na seção mais solicitada;

l é o vão;

E_c é o módulo de elasticidade do concreto;

I_e é o momento de inércia efetivo.

O cálculo da flecha diferida é feito de forma similar ao apresentado para a norma brasileira, aplicando-se o fator λ , abaixo representado, no resultado obtido de flecha imediata.

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \quad (2.36)$$

ρ' é a taxa de armadura de compressão, quando utilizada;

ξ é o fator que depende do tempo.

A flecha total é a soma das parcelas referente à deflexão inicial (δ_L) da carga ativa e o resultado do produto entre a deflexão inicial, da carga sustentada, e o fator de tempo ($\lambda_t \delta_{sus}$).

Os limites para flechas estabelecidos pelo ACI 318-19 estão definidos na Tabela 3.

Tabela 3 Limites para deslocamentos ACI 318-19

Elemento	Condição		Deslocamento a ser considerado	Deslocamento limite
Telhados planos	Não suportando ou anexado a elementos não estruturais susceptíveis de serem danificados por grandes deflexões		Deslocamento imediato devido ao máximo de Lr, S e R	$l/180$ ^[1]
Pisos	Deflexão imediata devido a L		$l/360$	
Telhado ou pisos	Suportando ou anexado a elementos não estruturais	Probabilidade que seja danificado por grandes deflexões	Essa parte da deflexão total ocorrendo após o anexo de elementos não estruturais, sendo a soma da deflexão no tempo devido a todas as cargas sustentadas e deflexão imediata devido a qualquer carga viva adicional ^[2]	$l/480$ ^[3]
		Improvável que seja danificado por grandes deflexões		$l/240$ ^[4]
^[1] Limite não destinado a salvaguardar contra empoçamentos. O empoçamento deve ser verificado através de cálculos adequados de deflexão, incluindo deflexões adicionais devido a água e considerando os efeitos a longo prazo de todas as cargas sustentadas, curvatura, tolerâncias de construção e confiabilidade das provisões para drenagem.				
^[2] A deflexão a longo prazo deve ser determinada em concordância com 24.2.4, mas pode ser reduzida pela quantidade de deflexão calculada para ocorrer antes da fixação de elementos não estruturais. Essa quantidade deve ser determinada com base nos dados de engenharia aceitos relacionados às características de deflexão-tempo dos membros semelhantes aos que estão sendo considerados.				
^[3] Limites podem ser ultrapassados se medidas adequadas forem tomadas para prevenir danos aos elementos suportados ou conectados.				
^[4] O limite não deve exceder a tolerância prevista para elementos não estruturais				

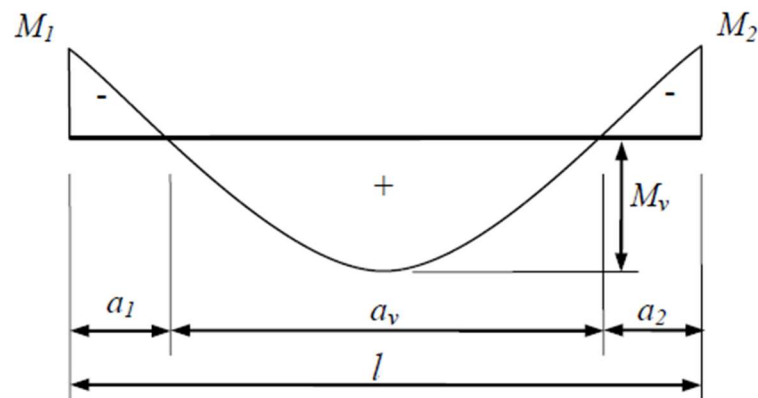
Fonte: ACI 318-19.

2.2.3 CONSIDERAÇÕES DA RIGIDEZ EQUIVALENTE PARA VIGAS CONTÍNUAS

Segundo a NBR 6118:2014 aplica-se a equação 2.17, da rigidez equivalente, para momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, conforme descrito no item 17.3.2.1.1 da norma.

Contudo, para os casos de vigas contínuas, os procedimentos recomendados conforme IBRACON (2015), sugerem que para obtenção de resultados precisos pode-se calcular um valor ponderado da rigidez equivalente, de acordo com o descrito a seguir, observando a Figura 8.

Figura 8 Rigidez equivalente em vão de viga contínua



Fonte: IBRACON (2015).

$$(EI)_{eq} = \frac{1}{l} [(EI)_{eq,1} \cdot a_1 + (EI)_{eq,v} \cdot a_v + (EI)_{eq,2} \cdot a_2] \quad (2.37)$$

$(EI)_{eq,1}$ é a rigidez à flexão equivalente no trecho 1;

$(EI)_{eq,v}$ é a rigidez à flexão equivalente no trecho com momentos positivos;

$(EI)_{eq,2}$ é a rigidez à flexão equivalente no trecho 2.

Para os três trechos recomenda-se que seja calculada a rigidez à flexão de acordo com a equação 2.17, considerando as armaduras existentes da seção mais solicitada em cada trecho e com M_a , respectivamente, igual a M_1 , M_v e M_2 . Pode-se adotar a_1/l e a_2/l , aproximadamente, igual a 0,15 (IBRACON, 2015).

A consideração recomendada pelo ACI 318-19, definida no item 24.2.3.6, diz que para lajes armadas em uma direção e vigas contínuas pode-se obter um momento de inércia efetivo aplicando-se uma média dos valores obtidos pela equação 2.30 para os momentos

críticos positivo e negativo das seções. Como referenciado no código, pode-se adotar o definido no ACI *Committee* 435 (1978), conforme ACI *Committee* 435R-20, para a média ponderada dos momentos de inércia efetivos calculados, de acordo com a equação 2.38 para sistemas bi engastados:

$$I_e = 0,70 I_{e(m)} + 0,15 (I_{e(1)} + I_{e(2)}) \quad (2.38)$$

E para sistemas com engaste e apoio a equação 2.39:

$$I_e = 0,85 I_{e(m)} + 0,15 I_{e(1)} \quad (2.39)$$

$I_{e(m)}$ o momento de inércia efetivo para momento positivo;

$I_{e(1)}$ e $I_{e(2)}$ os momentos de inércia efetivos para momentos negativos.

2.3 COMPARAÇÃO DAS NORMAS SELECIONADAS

A Tabela 4, a seguir, resume as principais equações adotadas para cada método em estudo, de acordo com as descrições dos itens anteriores.

Tabela 4 Parâmetros adotados nas normas

	NBR 6118:2014	ACI 318-19
Resistência à compressão do concreto	f_{ck}	f'_c
Tensão de escoamento da armadura de aço	f_{yk}	f_y
Rigidez Equivalente ou Momento de inércia efetivo	$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c$	$I_e \approx \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{2}{3} \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^2 \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)}$, para $M_a > \frac{2}{3} M_{cr}$
Momento de Fissuração	$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t}$	$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t}$
Momento de Inércia Fissurado	$I_{II} = \frac{b_w x_{II}^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 + \alpha_e A'_s (x_{II} - d')^2$	
Linha Neutra na seção fissurada	$x_{II} = -\frac{\alpha_e (A_s + A'_s)}{b} + \sqrt{\left[\frac{\alpha_e (A_s + A'_s)}{b} \right]^2 + \frac{2 \alpha_e (A_s d + A'_s d')}{b}}$	$\alpha_e = E_s / E_{cs}$
Resistência média do concreto à tração	$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$	$f_r = 0,623 \lambda \sqrt{f'_c}$
Módulo de Deformação Secante	$E_{cs} = \alpha_i E_{ci}$ $\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0$ $E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}}$	$E_c = \begin{cases} 4700 \sqrt{f'_c} & \text{para } f'_c \leq 40 \text{ MPa} \\ (3320 \sqrt{f'_c} + 6895) \cdot (Y_{conc} / 2320)^{1.5} & \text{para } f'_c > 40 \text{ MPa} \end{cases}$

Fonte: Autora (2022).

3 METODOLOGIA

3.1 ENSAIOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS

Como referência para comparação das duas normas, foram considerados resultados de ensaios experimentais e modelos numéricos encontrados na literatura, avaliando vigas isostáticas e hiperestáticas, a fim de abranger diferentes tipos de sistema estático. Os resultados serviram de base para as comparações com aplicação do modelo computacional desenvolvido por Campos (1993) e com os cálculos analíticos.

Para este trabalho, foram selecionadas vigas de seção transversal retangular com dimensões variadas, diferentes taxas de armadura, variações na resistência do concreto e tipos de carregamentos, dentre os quais carregamentos uniformemente distribuídos e com aplicação de cargas pontuais.

O modelo computacional para análise não linear de pórticos desenvolvido por Campos (1993) foi utilizado para comparação dos cálculos analíticos com resultados experimentais dos autores. Para as análises no modelo são consideradas as recomendações do CEB (1990) para a relação tensão-deformação do concreto, na tração e na compressão, contemplando também análises com consideração da protensão, nos casos de aderência inicial ou posterior e armadura não aderente, com ou sem atrito nos desviadores (Campos, 1993). Dessa forma, o modelo proposto é capaz de apresentar resultados similares a ensaios experimentais.

O desenvolvimento da análise analítica foi feito com suporte da ferramenta Microsoft Excel. Para as considerações das vigas contínuas, foi utilizada a média das rigidezes equivalentes com as proporções do vão segundo recomendações do IBRACON (2015) e do ACI *Committee* 435 (1978), apresentadas na seção 2.2.3, sugerido para obtenção de valores de rigidez mais precisos. No cálculo do momento de inércia quando o elemento se encontra no Estádio I, observou-se que a variação em aplicar o momento de inércia da seção bruta ou o momento de inércia calculado pela homogeneização da seção (eq. 2.3) foi de pouca importância, assim, utilizou-se o momento de inércia bruto.

De acordo com o estabelecido na NBR 6118:2014, no item 8.2.10, a aplicação do método simplificado tem seu limite para tensões de compressão de até $0,5f_c$, conforme considerações definidas no item 2.1.2, para diagramas lineares de tensões e deformações. O ACI 318-19 estabelece o limite como $0,6f_c$. Dessa forma, as retas limites plotadas nos gráficos que seguem permitem uma análise mais criteriosa da aplicação de cada método simplificado.

3.2 VIGAS ISOSTÁTICAS

As quatro vigas isostáticas estudadas nesta seção estão reunidas na Tabela 5, em que estão definidas as características geométricas, o f_{ck} e a área de armadura. As taxas de armadura foram determinadas com relação à área $b \times d$.

Tabela 5 Dados das vigas isostáticas

AUTOR	VIGA	f_{ck} (MPa)	L (mm)	b (mm)	h (mm)	d (mm)	A_s (mm ²)	ρ (%)
DU E TAO (1985)	D-0	35,6	4200	160	280	250	603	1,508
AHOOR (2000)	B-N2	48,6	3080	200	250	215	509	1,184
	B-N3						763	1,774
	B-N4						1018	2,367

Fonte: Autora (2022).

3.2.1 VIGA D-0 (DU E TAO, 1985)

Du e Tao (1985) apresentaram resultados de ensaios experimentais para 26 vigas, dentre as quais uma de concreto armado, viga D-0 selecionada neste estudo, e as demais em concreto protendido, sendo todas biapoiadas, com duas cargas aplicadas, conforme demonstra a Figura 9. Foram adotados os parâmetros de cálculo apresentados na Tabela 6, dentro do recomendado pela norma brasileira e pelo código americano.

Figura 9 Sistema estático da viga D-0

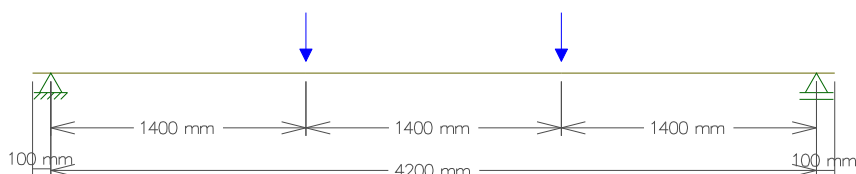


Tabela 6 Parâmetros adotados para a viga D-0

VIGA D-0	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	E_s (MPa)	α_e	I_c (cm ⁴)	I_{II} (cm ⁴)	M_{cr} (kN.cm)
NBR 6118:2014	3,25	29704	200000	6,73	29269	14282	1018
ACI 318-19	3,72	28043		7,13		14897	777

Fonte: Autora (2022).

Nas tabelas, $f_{ct,m}$ é a resistência média à tração do concreto, E_{cs} é o módulo de deformação secante do concreto, E_s é o módulo de elasticidade do aço, α_e é a relação entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto, I_c é o momento de inércia da seção bruta, I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada e M_{cr} é o momento de fissuração.

Na Figura 10 estão apresentadas as curvas de deflexão (δ) do ensaio experimental e a obtida com MEF, evidenciando proximidade nos resultados. A Figura 11 compara também os resultados da análise analítica para normas selecionadas, em que foram estabelecidos os limites de aplicação de métodos simplificados, para melhor compreensão da região em que são válidos.

Figura 10 Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (D-0)

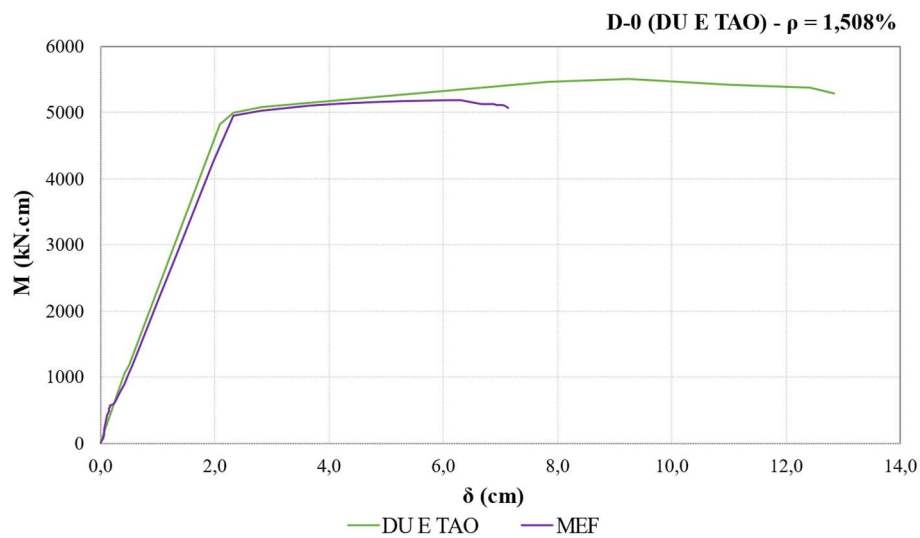
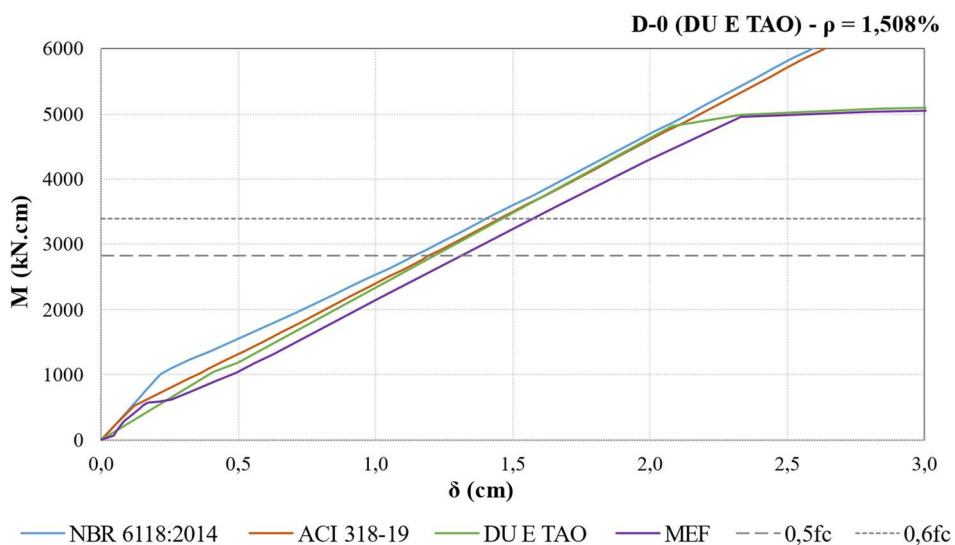


Figura 11 Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (D-0)



Fonte: Autora (2022).

Pela análise das curvas pode-se perceber que os valores de flecha encontrados para a norma brasileira estão menores que os encontrados pelo código americano, assim como os resultados obtidos pelos autores e pelo MEF, principalmente dentro da região limite para aplicação de métodos simplificados.

3.2.2 VIGAS B-N2, B-N3 E B-N4 (ASHOUR, 2000)

Do trabalho de Ashour (2000), foram analisadas as vigas B-N2, B-N3 e B-N4, biapoiadas com duas cargas aplicadas (Figura 12). A principal diferença entre as três vigas é a taxa de armadura, apresentando, respectivamente, 1,184%, 1,774% e 2,367%. Os parâmetros adotados estão nas tabelas seguintes.

Figura 12 Sistema estático das vigas B-N2, B-N3 e B-N4

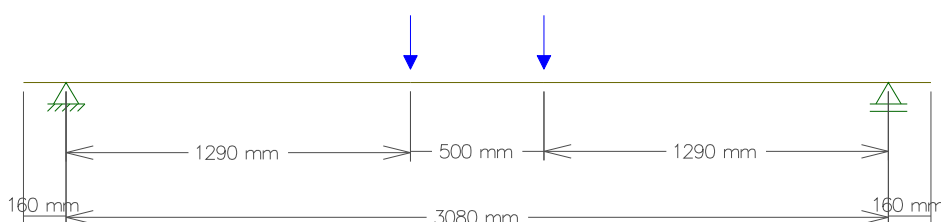


Tabela 7 Parâmetros adotados para as vigas B-N2, B-N3 e B-N4

ASHOUR (2000)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	E_s (MPa)	α_e	I_c (cm ⁴)	M_{cr} (kN.cm)
NBR 6118:2014	4,00	35980	200000	5,56	26042	1249
ACI 318-19	4,34	32769		6,10		905

Tabela 8 Momentos de inércia fissurados das vigas B-N2, B-N3 e B-N4

ASHOUR (2000)	I_{II} (cm ⁴)		
	B-N2	B-N3	B-N4
NBR 6118:2014	8197	11120	13657
ACI 318-19	8820	11916	14585

Fonte: Autora (2022).

Os gráficos a seguir mostram os resultados das curvas momento-flecha para os ensaios e para o MEF, respectivamente, para as vigas B-N2, B-N3 e B-N4, observando proximidade nos resultados, com o MEF se mostrando um pouco mais rígido.

Figura 13 Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (B-N2)

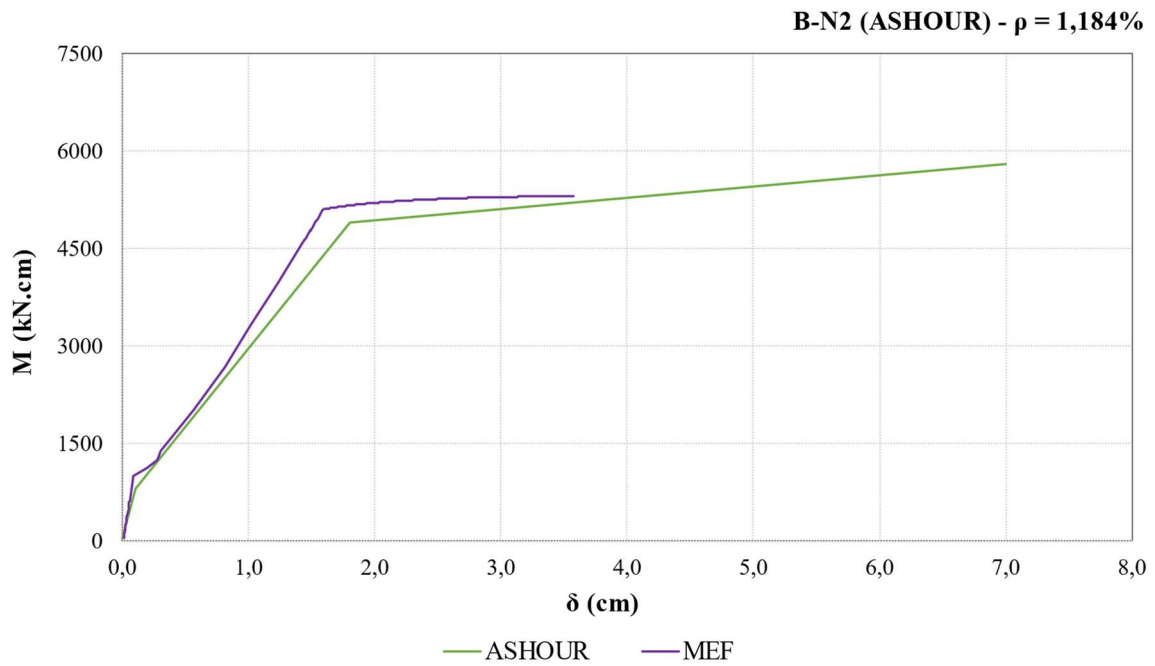
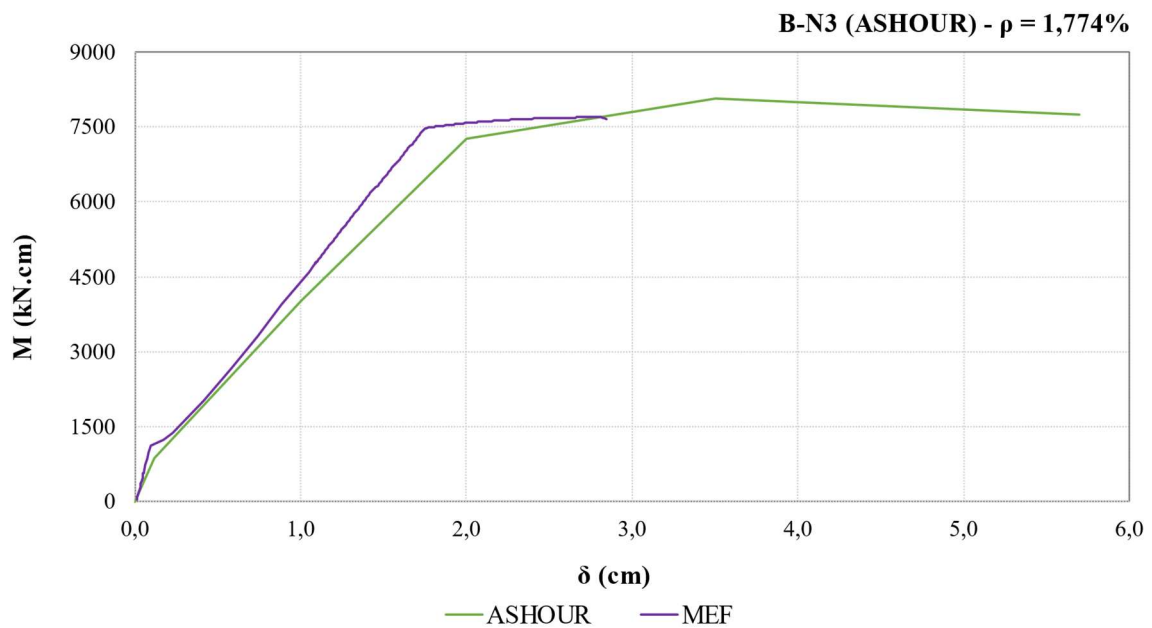
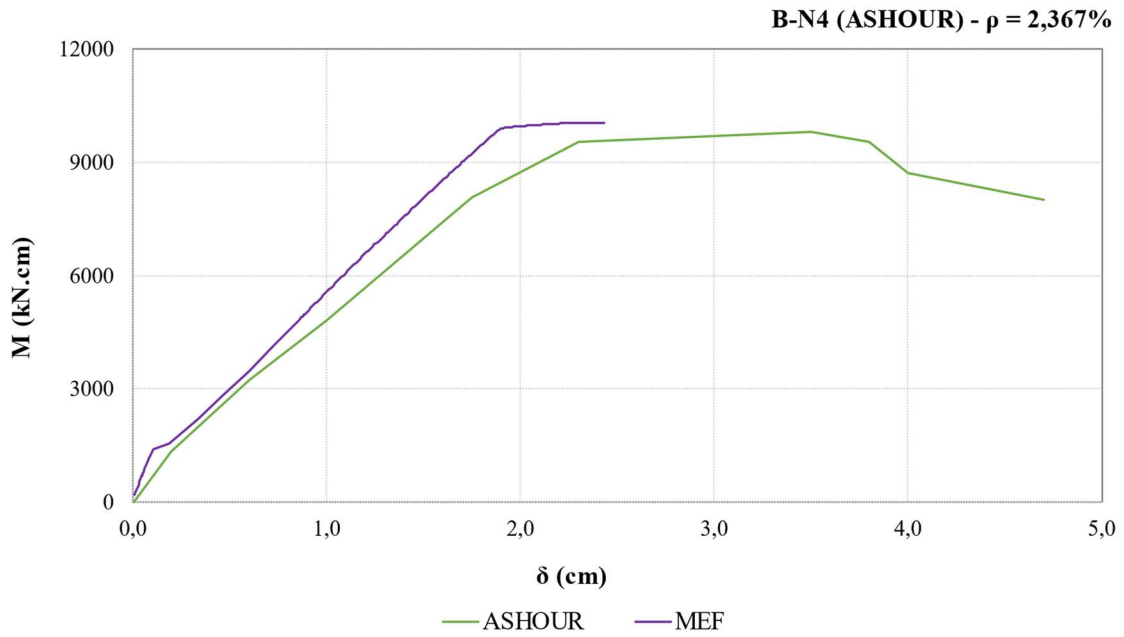


Figura 14 Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (B-N3)



Fonte: Autora (2022).

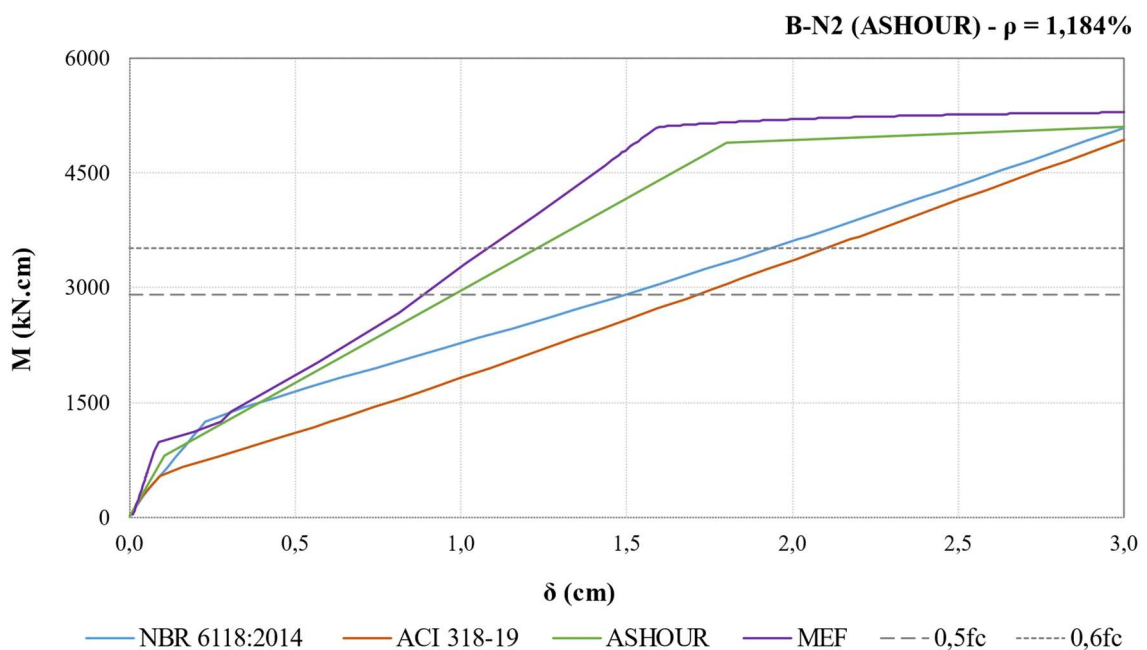
Figura 15 Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (B-N4)



Fonte: Autora (2022).

Os gráficos abaixo comparam os resultados analíticos para a NBR 6118:2014 e pelo ACI 318-19, para as três vigas, com representação das retas limite de $0,5f_c$ e $0,6f_c$.

Figura 16 Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (B-N2)



Fonte: Autora (2022).

Figura 17 Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (B-N3)

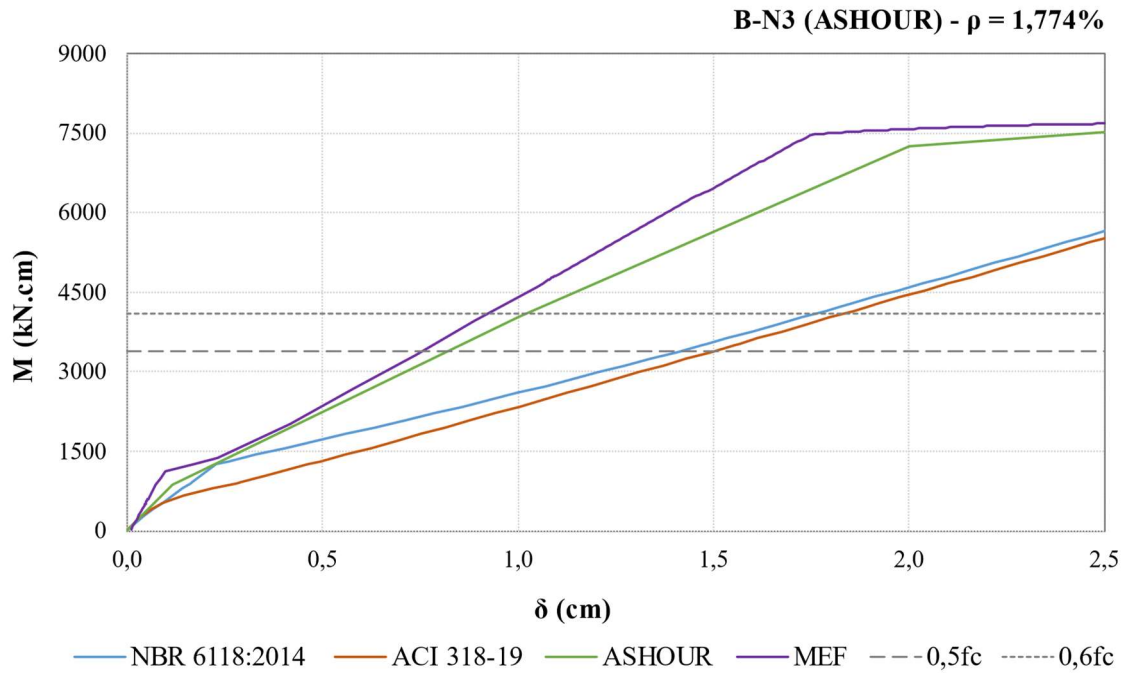
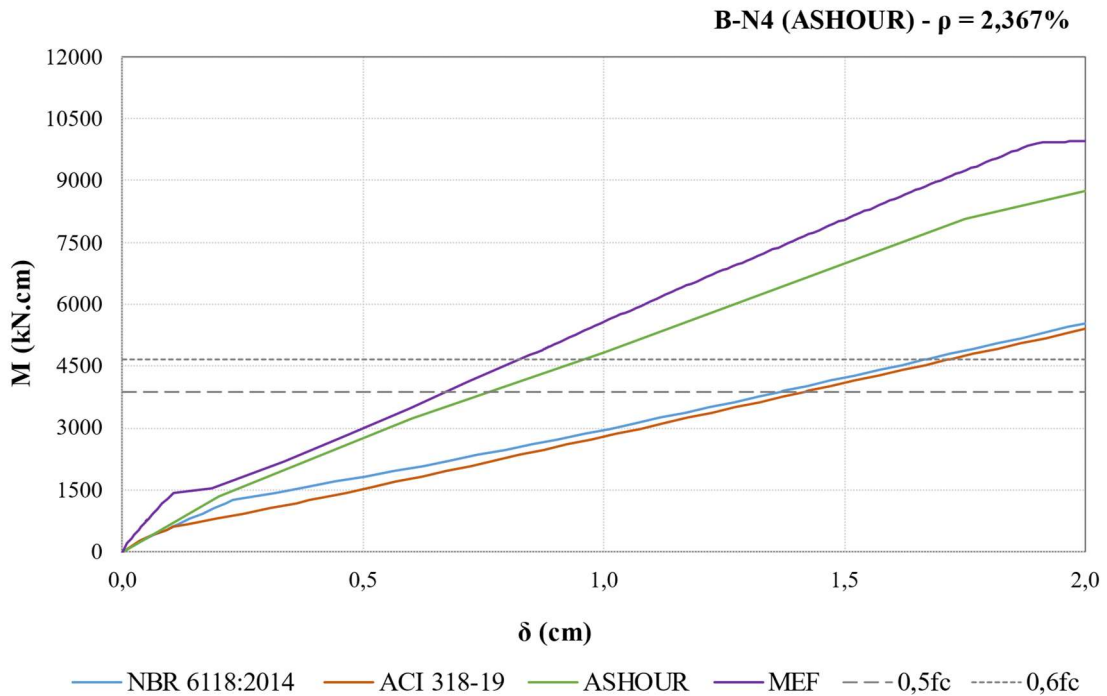


Figura 18 Gráfico do momento-flecha: Modelos de cálculo x Experimental (B-N4)



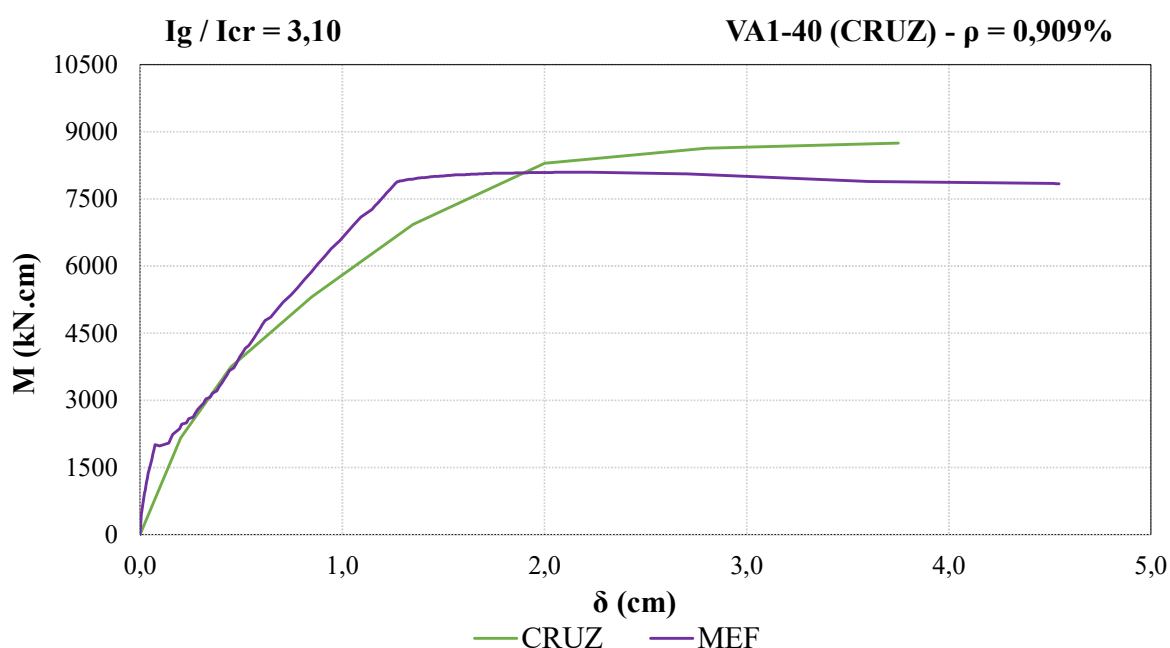
Fonte: Autora (2022).

Observa-se que com o aumento da taxa de armadura os resultados dos métodos simplificados ficaram mais próximos entre si, tendendo a convergirem.

3.3 VIGAS HIPERESTÁTICAS

Como meio de validação do MEF para consideração das vigas hiperestáticas, estão apresentados os resultados do modelo para a análise da viga contínua VA1-40 ensaiada por Cruz (1996). A Figura 19 mostra a variação das flechas máximas obtidas pelo autor e pelo modelo computacional, observando razoável concordância entre os valores analíticos e experimentais.

Figura 19 Gráfico do momento-flecha: Experimental x MEF (VA1-40)



Fonte: Autora (2022).

Para este trabalho foram selecionadas três vigas hiperestáticas, VC-G114, VC-G323 e VC-G512, analisadas numericamente por Junges (2011), comparando-se carregamentos e características geométricas diferentes, sendo os dados definidos na Tabela 9.

Tabela 9 Dados das vigas hiperestáticas

AUTOR	VIGA	f_{ck} (MPa)	L (mm)	b (mm)	h (mm)	d (mm)	A_s^+ (mm ²)	A_s^- (mm ²)	ρ^+ (%)	ρ^- (%)
JUNGES (2011)	VC-G114	20,0	3000	120	300	265	246	369	0,774	1,160
	VC-G323	25,0	4500	120	400	365	492	603	1,123	1,377
	VC-G512	25,0	6000	200	500	465	369	804	0,397	0,865

Fonte: Autora (2022).

3.3.1 VIGA VC-G114 (JUNGES, 2011)

A viga VC-G114 tem sistema estático representado a seguir (Figura 20), e os parâmetros utilizados nos cálculos estão na Tabela 10. A taxa de armadura positiva da viga é de 0,774% e negativa de 1,160%. Na Figura 21 está o gráfico resultante da análise.

Figura 20 Sistema estático da viga VC-G114

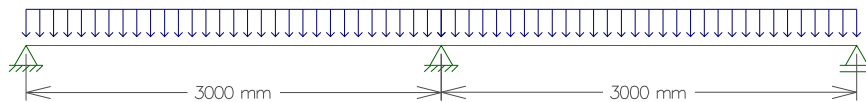
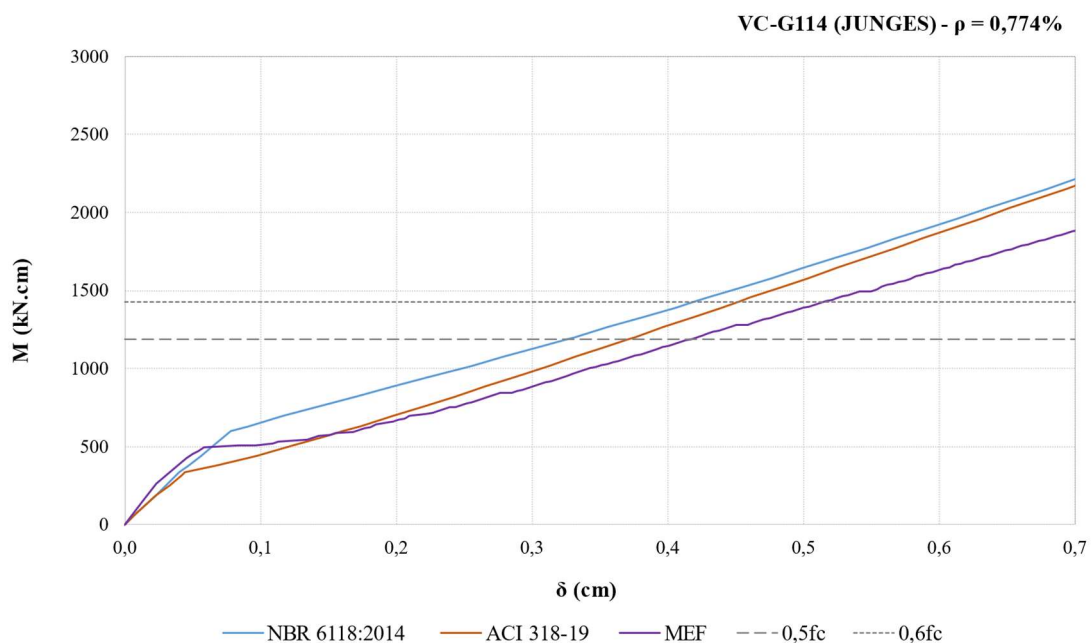


Tabela 10 Parâmetros adotados para a viga VC-G114

VIGA VC-G114	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	E_s (MPa)	α_e	I_c (cm ⁴)	I_{II} (cm ⁴)	M_{cr} (kN.cm)
NBR 6118:2014	2,21	21287	200000	9,40	27000	9942	597
ACI 318-19	2,79	21019		9,52			

Figura 21 Gráfico do momento-flecha: Métodos de cálculo x MEF (VC-G114)



Fonte: Autora (2022).

Observa-se que o modelo se mostrou menos rígido, caracterizando a seção subarmada. O método do ACI 318-19 foi o que mais se apresentou a favor da segurança, principalmente considerando o trecho limite determinado pelas normas.

3.3.2 VIGA VC-G323 (JUNGES, 2011)

A viga estudada neste tópico está representada na Figura 22, com taxa de armadura positiva de 1,123% e, negativa de 1,377%. Os parâmetros adotados estão na Tabela 11.

Figura 22 Sistema estático da viga VC-G323

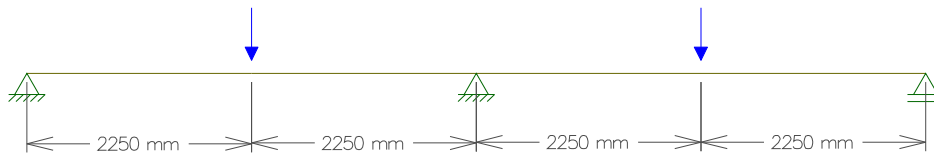
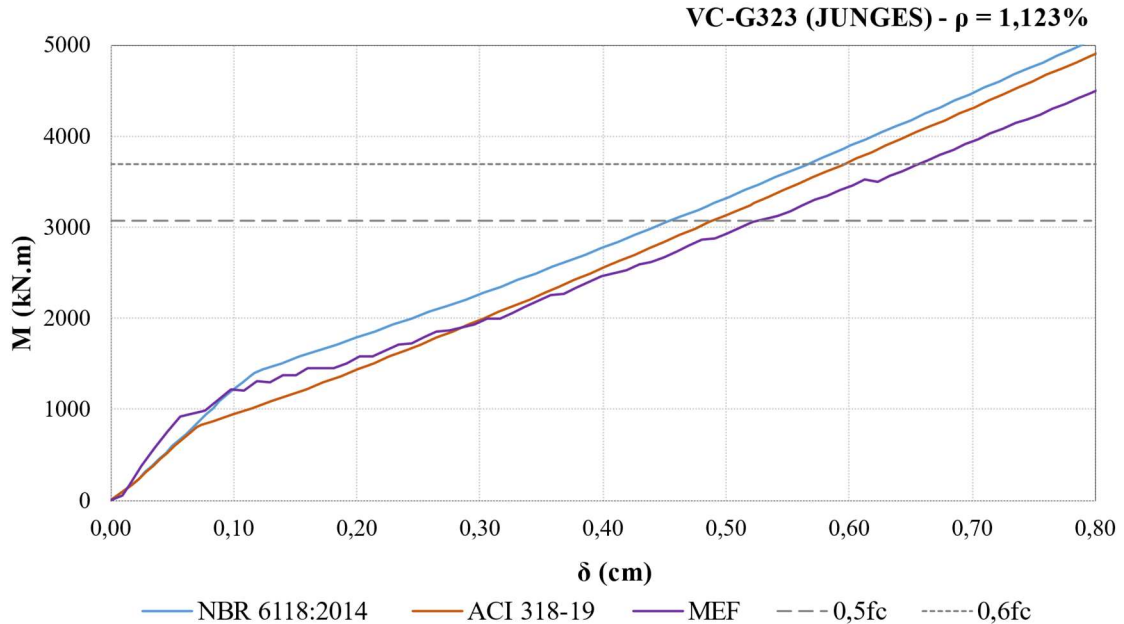


Tabela 11 Parâmetros adotados para a viga VC-G323

VIGA VC-G323	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	E_s (MPa)	α_e	I_c (cm ⁴)	I_{II} (cm ⁴)	M_{cr} (kN.cm)
NBR 6118:2014	2,56	24150	200000	8,28	64000	31273	1231
ACI 318-19	3,12	23500		8,51		31911	997

Figura 23 Gráfico do momento-flecha: Métodos de cálculo x MEF (VC-G323)



Fonte: Autora (2022).

De acordo com o gráfico da Figura 23 verifica-se que o modelo em média resultou numa estrutura com menor rigidez, concordando com a análise anterior, estando o código americano novamente com resultados mais próximos aos do modelo.

3.3.3 VIGA VC-G512 (JUNGES, 2011)

O sistema estático da viga VC-G512 está na Figura 24, apresentando taxa de armadura positiva de 0,397% e, negativa de 0,865%. Os parâmetros de cálculo estão na Tabela 12.

Figura 24 Sistema estático da viga VC-G512

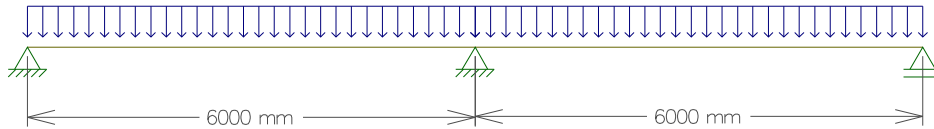
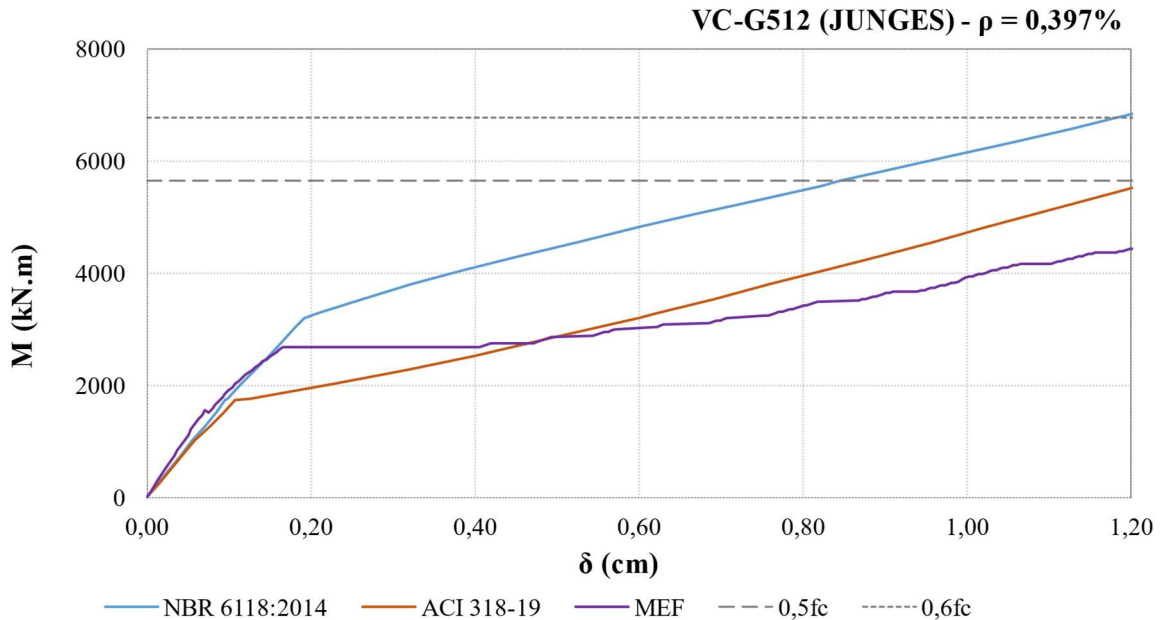


Tabela 12 Parâmetros adotados para a viga VC-G512

VIGA VC-G512	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	E_s (MPa)	α_e	I_c (cm ⁴)	I_{II} (cm ⁴)	M_{cr} (kN.cm)
NBR 6118:2014	2,56	-	200000	8,28	208333	47322	3206
ACI 318-19	3,12	24150		8,51			

Figura 25 Gráfico do momento-flecha: Métodos de cálculo x MEF (VC-G512)



Fonte: Autora (2022).

Pela Figura 25 percebe-se que os resultados com o MEF ficaram similares, caracterizando a seção com baixa taxa de armadura. Destacando que nessa situação os métodos simplificados tiveram maiores discrepâncias, estando o ACI 318-19 mais conservador.

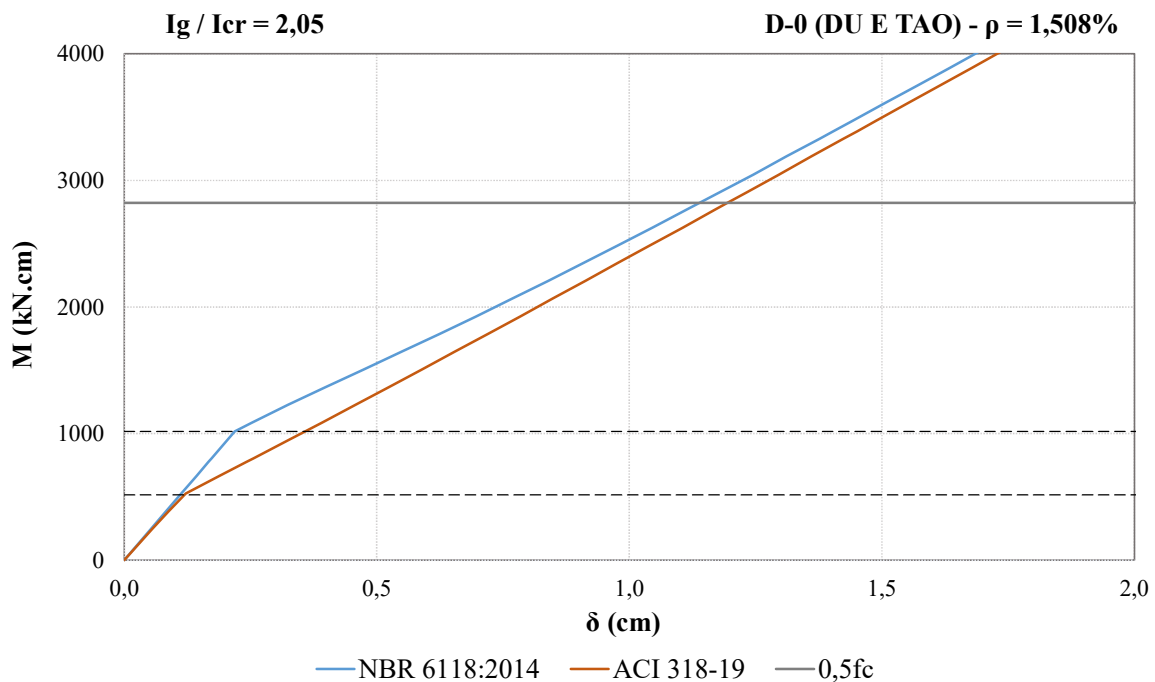
3.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Através das figuras a seguir para cada viga analisada é possível avaliar a variação dos resultados de deslocamentos entre a norma brasileira e o código americano. Assim, foram determinados dois trechos de comparação, em que se percebe a concentração das discrepâncias no geral. Os resultados ainda foram divididos entre as vigas isostáticas e hiperestáticas.

O trecho 1, entre as linhas tracejadas, foi escolhido de acordo com os valores de momento de fissuração de cada norma, ficando claro que nesta região encontram-se os maiores desvios. A partir do momento de fissuração do ACI 318-19 observa-se que os valores de flecha calculados pela NBR 6118:2014 seguem aumentando na mesma proporção, caracterizando elementos mais rígidos e considerando que ainda não houve a fissuração no vão.

A área correspondente ao trecho 2 foi determinada entre a linha tracejada do momento de fissuração da norma brasileira até a linha contínua que marca o limite de tensão estabelecido pela NBR 6118:2014, de $0,5f_c$. Percebe-se que as discrepâncias ficam menores a partir da linha limite das análises analíticas, com uma tendência a ficarem paralelas, não sendo significativas.

Figura 26 Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (D-0)



Fonte: Autora (2022).

Figura 27 Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (B-N2)

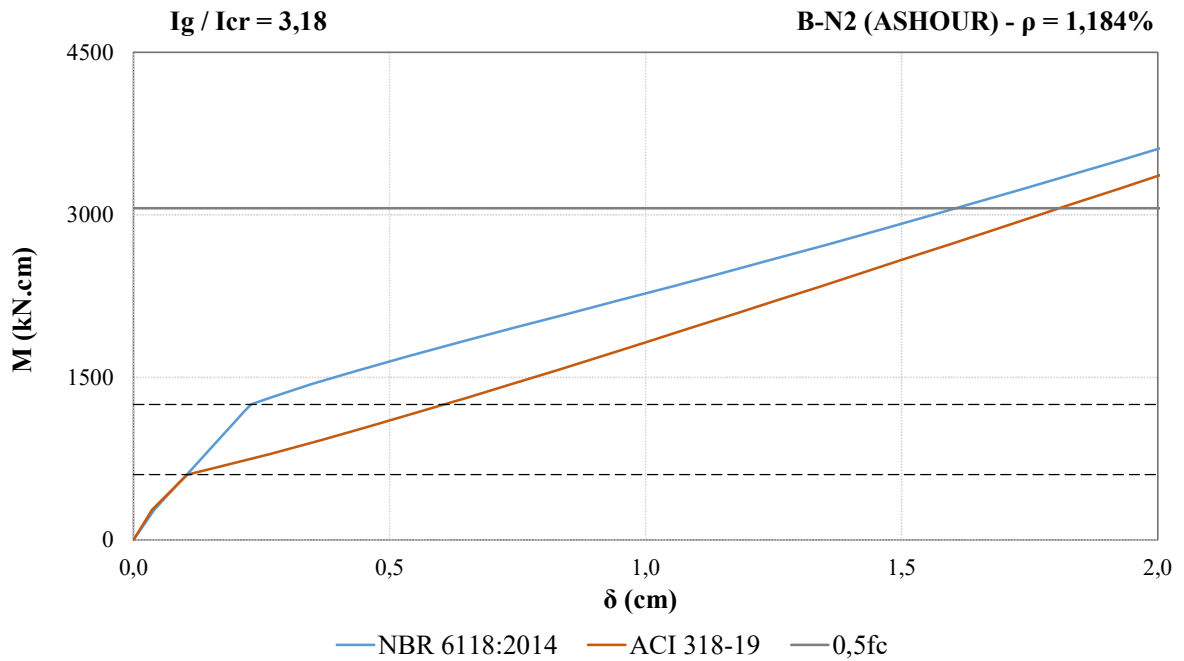
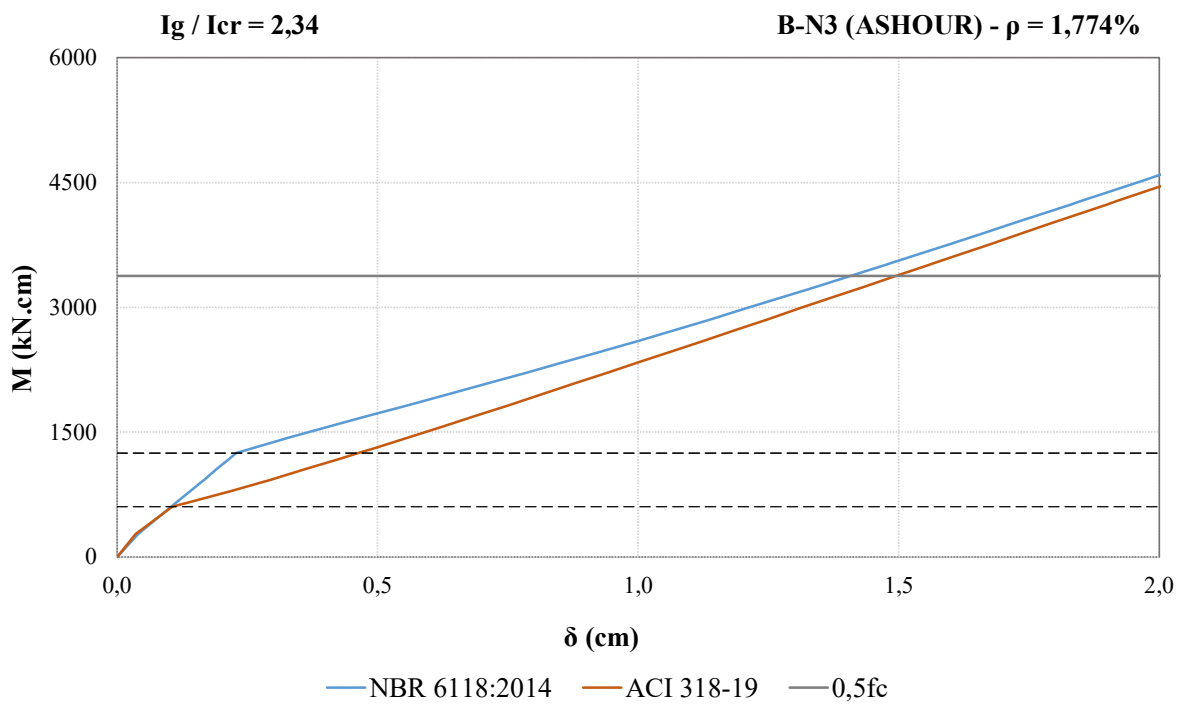
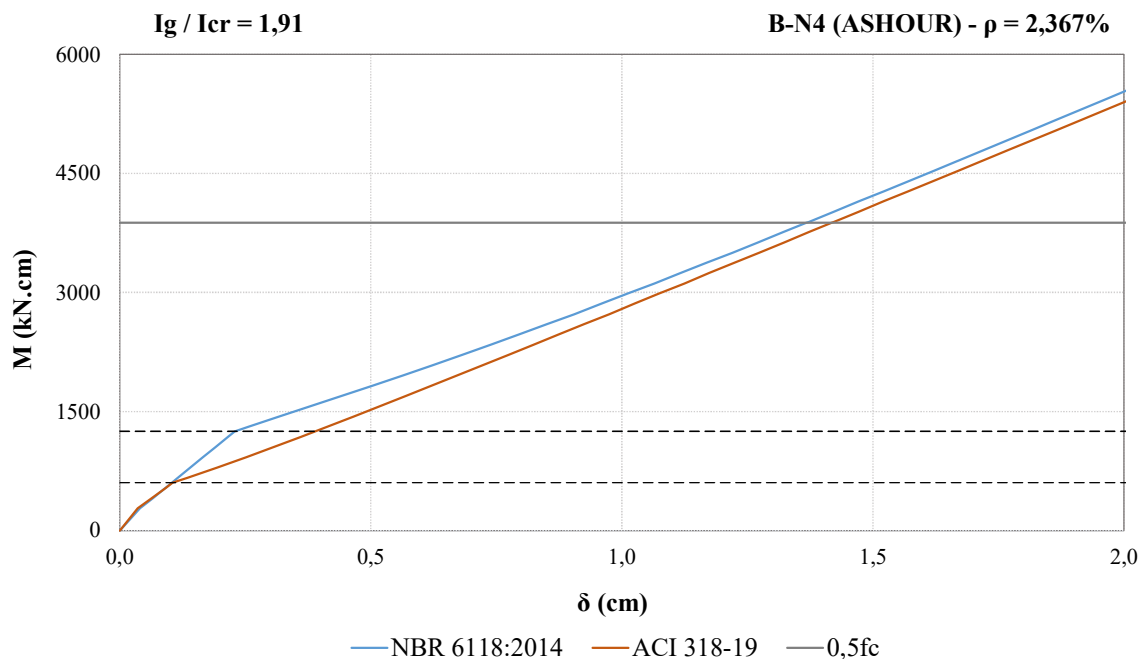


Figura 28 Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (B-N3)



Fonte: Autora (2022).

Figura 29 Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (B-N4)



Fonte: Autora (2022).

Visando proporcionar uma compreensão mais clara das variações, foram considerados os valores de deslocamentos determinados pela NBR 6118:2014 (δ_{NBR}) divididos pelos encontrados com o ACI 318-19 (δ_{ACI}). Dessa forma, foram obtidos os valores de média e desvio padrão, reunidos na Tabela 13, em função das taxas de armadura.

A dispersão dos dados foi calculada de acordo com a expressão a seguir:

$$D_P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\delta_{NBR}}{\delta_{ACI}} - \text{média} \left(\frac{\delta_{NBR}}{\delta_{ACI}} \right) \right]^2}{n}}$$

Sendo n o número de flechas calculadas entre cada trecho selecionado.

Tabela 13 Valores médios e desvios padrão das flechas das vigas isostáticas

$\delta_{NBR} / \delta_{ACI}$	Trecho 1: $M_{cr(ACI)} - M_{cr(NBR)}$		Trecho 2: $M_{cr(NBR)} - 0,5f_c$	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
$\rho = 1,508\%$	0,748	0,127	0,844	0,111
$\rho = 0,560\%$	0,404	0,261	0,601	0,205
$\rho = 1,184\%$	0,553	0,209	0,693	0,167
$\rho = 1,774\%$	0,639	0,161	0,809	0,141
$\rho = 2,367\%$	0,719	0,139	0,865	0,113

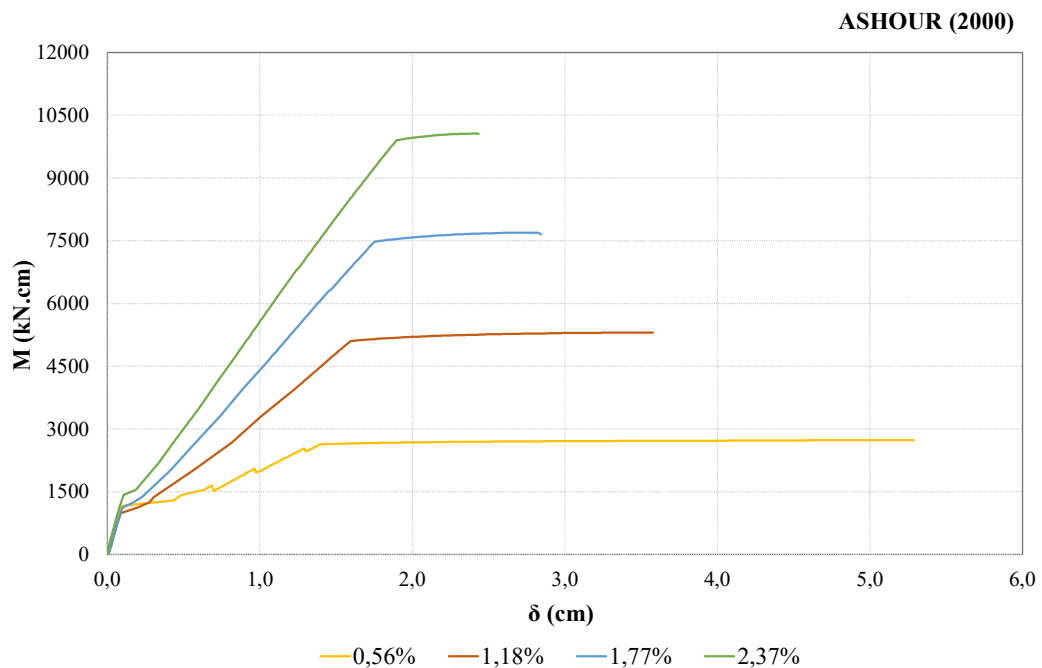
Nota-se que o código americano apresenta valores mais conservadores em relação a norma brasileira, estando o ACI 318-19 com valores de flechas no trecho 1, em média, 40% maiores do que a NBR 6118:2014 e no trecho 2, com valores 25% maiores. Vale ressaltar que a menor taxa de armadura analisada apresentou maior o desvio padrão. Pode-se verificar esses dados de acordo com a Tabela 14, que mostra o quanto os valores do ACI 318-19 são superiores em relação aos da NBR 6118:2014, em porcentagem, para cada taxa de armadura.

Tabela 14 Relações das flechas calculadas vigas isostáticas: NBR x ACI

$\delta_{NBR} / \delta_{ACI}$	ACI > NBR	
	Trecho 1	Trecho 2
$\rho = 1,508$	25%	16%
$\rho = 0,560$	60%	40%
$\rho = 1,184$	45%	31%
$\rho = 1,774$	36%	19%
$\rho = 2,367$	28%	14%

A Figura 30 mostra as curvas de momento-flecha obtidas pelo MEF para as três vigas estudadas por Ashour (2000), em que foi considerada também uma viga com as mesmas características geométricas e físicas, mas com taxa de armadura inferior, de 0,56%.

Figura 30 Gráfico momento-flecha: vigas de Ashour (2000) x MEF



Fonte: Autora (2022).

Dessa forma, pode-se observar pelas inclinações das curvas a variação da rigidez em função das taxas, verificando que para maiores taxas a resistência se faz mais presente. Fica evidente, assim, que nos casos de taxas de armaduras mais baixas, a contribuição do concreto entre fissuras torna-se de maior importância para determinação da rigidez equivalente.

Os gráficos a seguir representam os resultados para as vigas hiperestáticas estudadas, em que foram considerados os mesmos critérios para definição dos trechos de comparação.

Figura 31 Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (VC-G114)

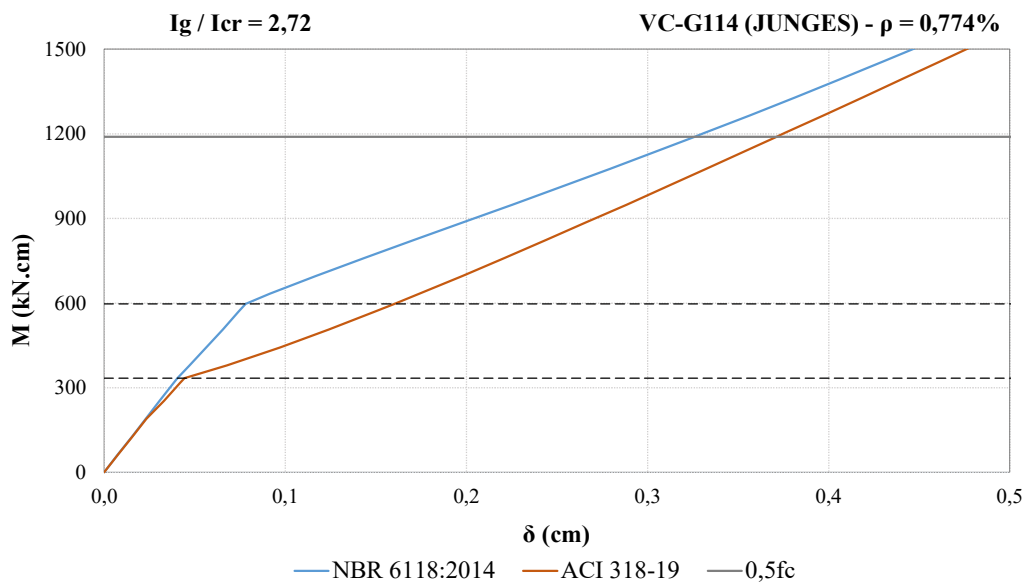
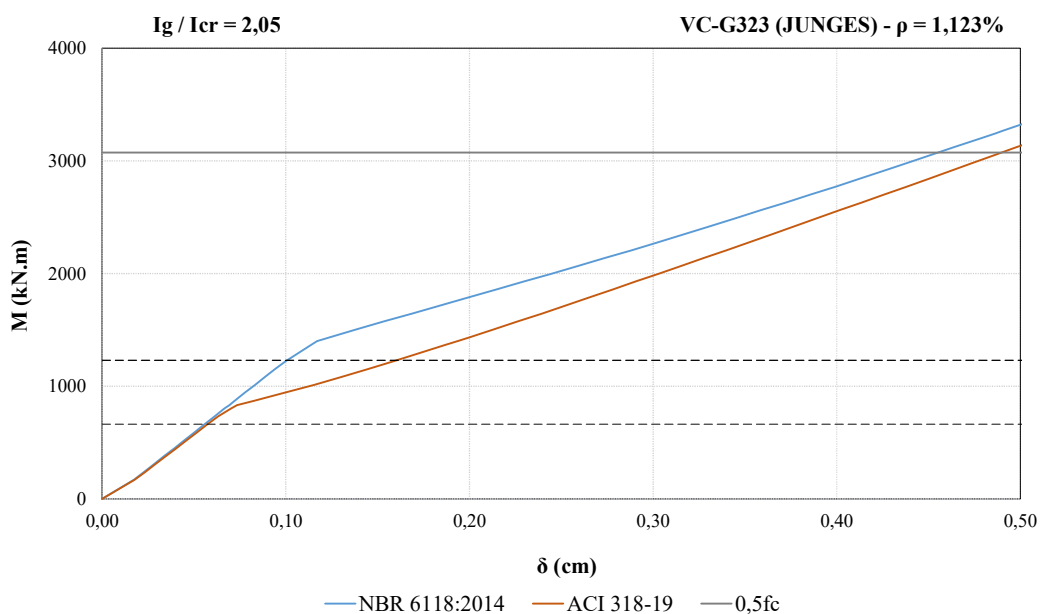
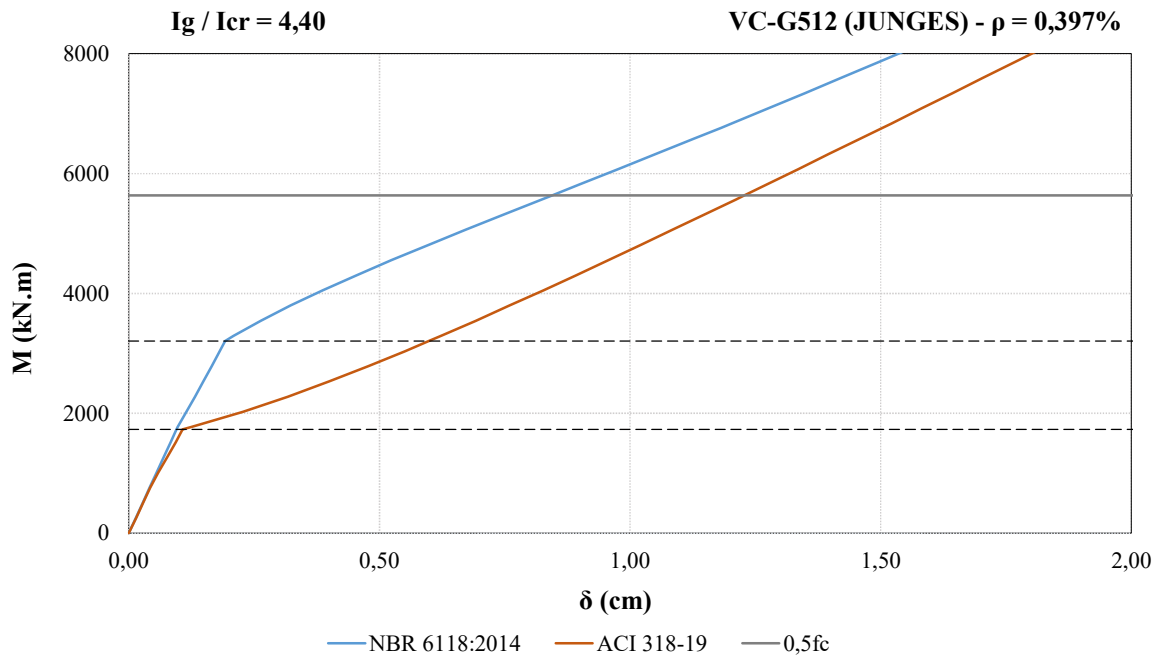


Figura 32 Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (VC-G323)



Fonte: Autora (2022).

Figura 33 Gráfico momento-flecha: NBR 6118:2014 x ACI 318-19 (VC-G512)



Fonte: Autora (2022).

Com relação aos gráficos acima e pelos resultados da Tabela 15 e Tabela 16, constata-se novamente que a norma brasileira se mostra menos conservadora.

Tabela 15 Valores médios e desvios padrão das flechas das vigas hiperestáticas

$\delta_{NBR} / \delta_{ACI}$	Trecho 1: $M_{cr(ACI)} - M_{cr(NBR)}$		Trecho 2: $M_{cr(NBR)} - 0,5f_c$	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
$\rho = 0,774\%$	0,616	0,149	0,716	0,130
$\rho = 1,123\%$	0,673	0,120	0,819	0,111
$\rho = 0,397\%$	0,494	0,205	0,517	0,126

Tabela 16 Relações das flechas calculadas vigas hiperestáticas: NBR x ACI

$\delta_{NBR} / \delta_{ACI}$	ACI > NBR	
	Trecho 1	Trecho 2
$\rho = 0,774$	38%	28%
$\rho = 1,123$	33%	18%
$\rho = 0,397$	51%	48%

Fonte: Autora (2022).

Pelos resultados, o código americano apresentou valores de flechas no trecho 1, em média, 41% maiores do que a NBR 6118:2014 e no trecho 2, com valores 32% maiores. Para as taxas de armadura menores os desvios ficaram mais altos, assim como para as vigas isostáticas, mostrando que este parâmetro é de grande influência para a aplicação dos modelos simplificados estudados. Podemos também analisar a relação I_g/I_{cr} para definir as tendências dos métodos, com relações mais altas, os desvios também ficam maiores.

A partir das porcentagens determinadas, foram traçados os gráficos da Figura 34 e da Figura 35, em que se pode perceber com clareza as tendências das flechas do código americano ficarem ainda maiores às da norma brasileira, para menores taxas de armadura.

Figura 34 Gráfico da relação $ACI > NBR$ em função da taxa de armadura no trecho 1

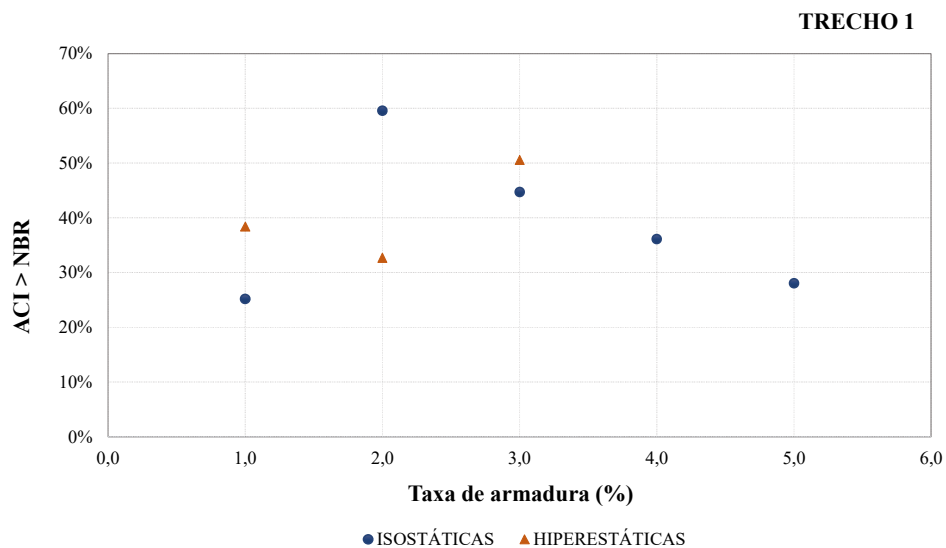
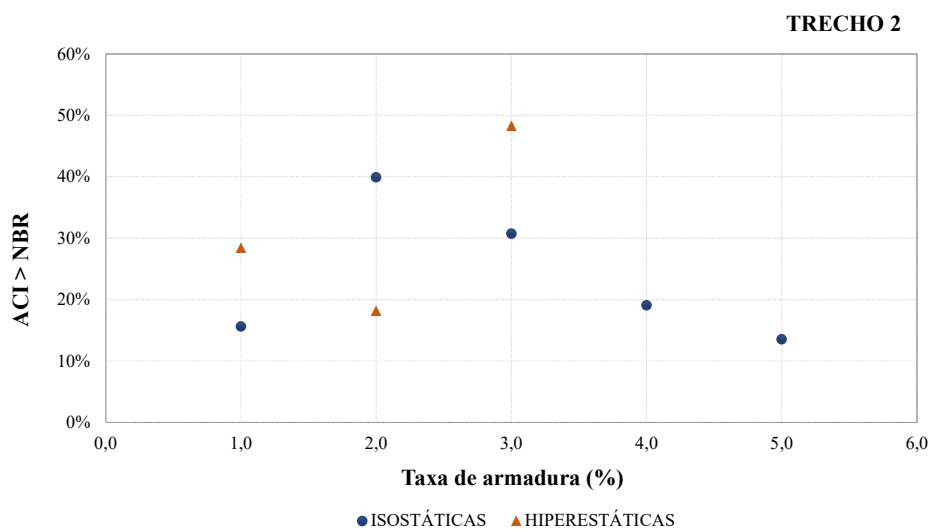


Figura 35 Gráfico da relação $ACI > NBR$ em função da taxa de armadura no trecho 2



4 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Este trabalho teve como principal objetivo avaliar os métodos simplificados recomendados pela NBR 6118:2014 e pelo ACI 318-19, em comparação com ensaios e modelos refinados de elementos finitos, adotando os parâmetros estabelecidos por cada norma. Foram estudadas vigas isostáticas e hiperestáticas, que mostraram similaridade nas tendências dos métodos, de acordo com as características relacionadas às taxas de armadura.

Em relação aos resultados, optou-se por comparar as flechas de cada norma em trechos adequados, restringindo a análise onde se observou maiores discrepâncias. Além de considerar os limites de utilização dos elementos de concreto armado, situações em que normalmente as peças são dimensionadas.

Foi possível observar que em todos os casos de comparação a norma brasileira se mostrou menos conservadora, com valores de flechas estimadas menores que o código americano. Ressaltando que para taxas de armaduras mais baixas, caracterizando elementos levemente reforçados como as lajes, estão os maiores desvios. Para as taxas de armadura próximas a 1,00%, considerando vigas biapoiadas e contínuas, foi possível verificar que, em média, as flechas do ACI 318-19 estiveram 50% maiores que as calculadas pela NBR 6118:2014.

Para as vigas hiperestáticas, a NBR 6118:2014 sugere o cálculo somente com as propriedades geométricas do vão, mas existem sugestões que consideram uma média ponderada entre tais características para trechos de momento positivo e negativo, podendo ser comparado pelo exemplo resolvido no Anexo A do trabalho. Para a viga analisada, com taxa de aproximadamente 0,4%, o cálculo considerando o valor médio da inércia equivalente resultou em flecha, aproximadamente, 7% maior.

Para futuros trabalhos sugere-se ampliação dos exemplos com vigas isostáticas e hiperestáticas, com estudos comparativos considerando a flecha diferida no tempo, analisando os limites estabelecidos pelas normas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *ACI 318-19: Building Code Requirements for Structural Concrete*. June, 2019.

_____. *ACI 318R-19: Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete*. June, 2019.

_____. *ACI 435R-20: Report on Deflection of Nonprestressed Concrete Structures*. June, 2015.

ARAÚJO, José Milton De. *Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado*. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n. 5, p. 1-10, Agosto, 2004.

ASHOUR, S. A. *Effect of compressive strength and tensile reinforcement ratio on flexural behavior of high-strength concrete beams*. Engineering Structures, V. 22, p. 413-423, 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

_____. *NBR 6118:2014 Comentários e Exemplos de Aplicações*. Ed.: IBRACON, 2015.

BISCHOFF, Peter H. *Comparison of Existing Approaches for Computing Deflection of Reinforced Concrete*. ACI Structural Journal, V. 117, No. 1, January, 2020.

BISCHOFF, Peter H. *Effective Moment of Inertia for Calculating Deflections of Concrete Members Containing Steel Reinforcement and Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement*. ACI Structural Journal, V. 104, No. 1, January-February, 2007.

BISCHOFF, Peter H. *Reevaluation of Deflection Prediction for Concrete Beams Reinforced with Steel and Fiber Reinforced Polymer Bars*. Journal of Structural Engineering, V. 131, No. 5, May, 2005.

CRUZ, A. C. *Capacidade de redistribuição de esforços em vigas contínuas*. Rio de Janeiro, 1996. 113 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

DU, G.; TAO, X. *Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams*. PCI Journal, v. 30, n. 6, pp.72-91, November/December, 1985.

DUMONT, N. A.; GUIMARÃES, G. B.; CAMPOS, C. M. O. *Um modelo computacional para a análise de pórticos de concreto protendidos com cabos aderentes e não aderentes*. XIV CILAMCE – Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Dezembro, 1985.

JUNGES, Elisabeth. *Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado*. Florianópolis, 2011. 361 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

JUNGES, Elisabeth; LA ROVERE, Henriette Lebre. *Comparação entre métodos simplificados e modelos não lineares de elementos finitos para o cálculo de flecha imediata em vigas biapoiadas de concreto armado*. IBRACON, v. 10, n. 2, pp.415-450, Abril, 2017.

MELO, Laila Monteiro Alves. *Avaliação de deslocamentos em vigas de concreto com armaduras de aço e de polímeros reforçados por fibras*. Maceió, 2019. 169 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

MORELLI, Francesco et al. *Influence of Tension Stiffening on the Flexural Stiffness of Reinforced Concrete Circular Sections*. Materials. MDPI, v. 10, n. 6, pp.669-669, 18 jun. 2017.

PINHEIRO, Luciana Ganzaroli. *Procedimentos para avaliação de flecha em elementos estruturais de concreto armado*. Niterói, 2020. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

ANEXO A

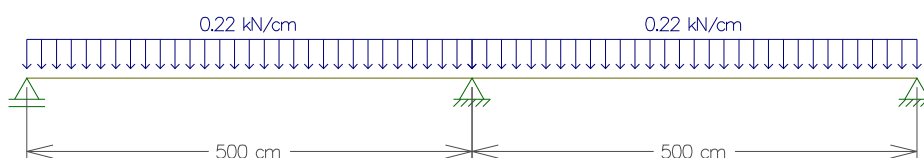
EXEMPLO PRÁTICO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLIFICADO PARA CÁLCULO DE FLECHAS SEGUNDO A NBR 6118:2014

Neste anexo está descrito o passo a passo para cálculo de flechas nos elementos de concreto armado, seguindo as orientações da norma brasileira.

A.1. DADOS DA VIGA EM ANÁLISE

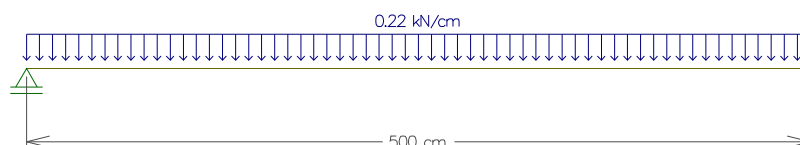
A viga em estudo apresentada na Figura 36, possui dois vãos simétricos, com 500cm cada, seção transversal de 20cm de largura e 50cm de altura, f_{ck} de 30MPa e carregamento uniformemente distribuído com carga de $p_{CQP} = 0,22$ kN/cm, definida conforme combinações de serviço quase permanentes (CQP) devido ao ELS-DEF, abordadas no item 11.8.3.2 da NBR 6118:2014. A armadura positiva na seção de momento máximo positivo é de $3,69\text{cm}^2$ ($3\phi 12,5\text{mm}$), a armadura negativa na seção do apoio, de $8,04\text{cm}^2$ ($4\phi 16\text{mm}$) e a altura útil da seção é de 46cm.

Figura 36 Sistema estático da viga



De acordo com o apresentado, devido a continuidade no apoio central e pela simetria do sistema, considera-se o sistema estático para análise como o de uma viga apoiada-engastada, conforme Figura 37.

Figura 37 Sistema estático de cálculo



A.2. COMBINAÇÃO EM SERVIÇO

$$F_{d,ser} = \Sigma F_{gi,k} + \Sigma \Psi_{2j} F_{gj,k}$$

$$pp = 20\text{cm} \times 50\text{cm} \times (25 \times 10^{-6}) \text{ kN/cm}^3 = 0,025 \text{ kN/cm}$$

$$g = 0,165 \text{ kN/cm}$$

$$q = 0,100 \text{ kN/cm}$$

$$\Psi_2 = 0,3$$

$$p_{CQP} = (0,025 + 0,165) \text{ kN/cm} + 0,3 \cdot 0,100 \text{ kN/cm} = 0,22 \text{ kN/cm}$$

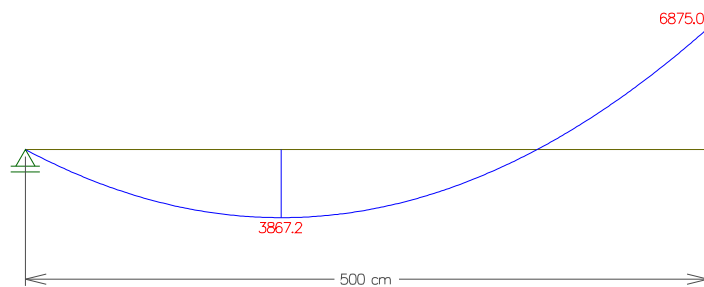
A.3. VERIFICAÇÃO DO ESTÁDIO DA SEÇÃO

A.3.1. MOMENTOS MÁXIMOS ATUANTES

$$M_{a,v\tilde{a}o} = \frac{p_{CQP} \cdot L^2}{14,22} = \frac{0,22 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \cdot (500 \text{ cm})^2}{14,22} = 3868 \text{ kN.cm}$$

$$M_{a,apoio} = \frac{p_{CQP} \cdot L^2}{8} = \frac{0,22 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \cdot (500 \text{ cm})^2}{8} = 6875 \text{ kN.cm}$$

Figura 38 Diagrama do momento fletor



A.3.2. MOMENTO DE FISSURAÇÃO

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 208333 \text{ cm}^4$$

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} = 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,90 \text{ MPa} = 0,290 \text{ kN/cm}^2$$

$$\alpha = 1,5 \text{ (para seções retangulares)}$$

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} = \frac{1,5 \cdot 0,290 \text{ kN/cm}^2 \cdot 208333 \text{ cm}^4}{50 \text{ cm}/2} = 3625 \text{ kN.cm}$$

Como $M_{a,v\tilde{a}o}$ e $M_{a,apoio}$ são maiores que M_r , as seções encontram-se no Estádio II. Dessa forma, para uma avaliação aproximada da flecha imediata, calcula-se a rigidez equivalente para consideração da fissuração, conforme item 17.3.2.1.1 da NBR 6118:2014.

A.4. RIGIDEZ EQUIVALENTE

A.4.1. MÓDULO DE ELASTICIDADE SECANTE

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} = 0,8 + 0,2 \frac{30}{80} = 0,875 \leq 1,0$$

$$\alpha_E = 1,0 \text{ (granito ou gnaisse)}$$

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} = 1 \cdot 5600 \cdot \sqrt{30} = 30672 \text{ MPa (para } f_{ck} \text{ de 20MPa a 50MPa)}$$

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} = 0,875 \cdot 30672 \text{ MPa} = \mathbf{26838 \text{ MPa}}$$

A.4.2. LINHA NEUTRA DA SEÇÃO FISSURADA (VÃO)

Como neste exemplo temos armaduras simples nas seções avaliadas, aplica-se $A's = 0$ na equação 2.7, desenvolvida no item 2.1.2 deste trabalho.

$$E_s = 200000 \text{ MPa}$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} = \frac{200000 \text{ MPa}}{26838 \text{ MPa}} = 7,45$$

$$x_{II} = \frac{\alpha_e A_s}{b} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b d}{\alpha_e A_s}} \right) = \frac{7,45 \cdot 3,69 \text{ cm}^2}{20 \text{ cm}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \text{ cm} \cdot 46 \text{ cm}}{7,45 \cdot 3,69 \text{ cm}^2}} \right)$$

$$x_{II,v\tilde{a}o} = \mathbf{9,95 \text{ cm}}$$

A.4.3. MOMENTO DE INÉRCIA FISSURADO (VÃO)

$$I_{II} = \frac{b_w x_{II}^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 = \frac{20 \text{ cm} \cdot (9,95 \text{ cm})^3}{3} + 7,45 \cdot 3,69 \text{ cm}^2 \cdot (46 \text{ cm} - 9,95 \text{ cm})^2$$

$$I_{II,v\tilde{a}o} = \mathbf{42294 \text{ cm}^4}$$

A.4.4. LINHA NEUTRA DA SEÇÃOFISSURADA (APOIO)

$$x_{II} = \frac{7,45 \cdot 8,04 \text{ cm}^2}{20 \text{ cm}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \text{ cm} \cdot 46 \text{ cm}}{7,45 \cdot 8,04 \text{ cm}^2}} \right)$$

$$x_{II,apoio} = \mathbf{13,87 \text{ cm}}$$

A.4.5. MOMENTO DE INÉRCIA FISSURADO (APOIO)

$$I_{II} = \frac{20 \text{ cm} \cdot (13,87 \text{ cm})^3}{3} + 7,45 \cdot 8,04 \text{ cm}^2 \cdot (46 \text{ cm} - 13,87 \text{ cm})^2$$

$$I_{II,apoio} = \mathbf{79623 \text{ cm}^4}$$

A.4.6. FÓRMULA DA RIGIDEZ EQUIVALENTE

$$M_{a,v\tilde{a}o} = \mathbf{3868 \text{ kN.cm}}$$

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_{a,v\tilde{a}o}} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_{a,v\tilde{a}o}} \right)^3 \right] \cdot I_{II,v\tilde{a}o} \right\} \leq E_{cs} I_c$$

$$(EI)_{eq,t0} = 2683,8 \text{ kN/cm}^2 \cdot \left\{ \left(\frac{3625 \text{ kN.cm}}{3868 \text{ kN.cm}} \right)^3 \cdot 208333 \text{ cm}^4 + \left[1 - \left(\frac{3625 \text{ kN.cm}}{3868 \text{ kN.cm}} \right)^3 \right] \cdot 42294 \text{ cm}^4 \right\}$$

$$(EI)_{eq,t0(NBR)} = \mathbf{4,80 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2} \leq 2683,8 \text{ kN/cm}^2 \cdot 208333 \text{ cm}^4 = 5,59 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2$$

A.5. VERIFICAÇÃO DA TENSÃO NO CONCRETO

$$\sigma_c = \frac{M_{a,v\tilde{a}o} \cdot x_{II,v\tilde{a}o}}{I_{II,v\tilde{a}o}}$$

$$\sigma_c = \frac{3868 \text{ kN.cm} \cdot 9,95 \text{ cm}}{42294 \text{ cm}^4} = \mathbf{0,910 \frac{kN}{cm^2} = 9,10 \text{ MPa}}$$

Sendo o valor da tensão inferior ao limite estabelecido pela NBR 6118:2014, de $0,5f_c = 0,5 \cdot 30\text{MPa} = 15\text{MPa}$.

A.6. CONSIDERAÇÕES DA RIGIDEZ EQUIVALENTE PARA VIGAS CONTÍNUAS

Conforme descrito no item 2.2.3, para uma consideração mais precisa da rigidez, o IBRACON (2015) sugere adotar um valor ponderado da rigidez, em que se pode adotar coeficiente de ponderação igual a 0,15 para os trechos de momento negativo e 0,85 para o trecho de momento positivo. O cálculo é apresentado a seguir.

A.6.1. RIGIDEZ DO TRECHO DE MOMENTO POSITIVO

$$M_{a,v\tilde{a}o} = 3868 \text{ kN.cm}$$

$$(EI)_{eq,v} = 4,80 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2 \quad (\text{conforme calculado em A.4.6})$$

A.6.2. RIGIDEZ EQUIVALENTE DO TRECHO DE MOMENTO NEGATIVO

$$M_{a,apoio} = 6875 \text{ kN.cm}$$

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_{a,apoio}} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_{a,apoio}} \right)^3 \right] \cdot I_{II,apoio} \right\} \leq E_{cs} I_c$$

$$(EI)_{eq,t0} = 2683,8 \text{ kN/cm}^2 \cdot \left\{ \left(\frac{3625 \text{ kN.cm}}{6875 \text{ kN.cm}} \right)^3 \cdot 208333 \text{ cm}^4 + \left[1 - \left(\frac{3625 \text{ kN.cm}}{6875 \text{ kN.cm}} \right)^3 \right] \cdot 79623 \text{ cm}^4 \right\}$$

$$(EI)_{eq,1} = 2,64 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2 \leq 5,59 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2$$

A.6.3. FÓRMULA DA RIGIDEZ PONDERADA

$$(EI)_{eq} = \frac{1}{l} [(EI)_{eq,1} \cdot a_1 + (EI)_{eq,v} \cdot a_v + (EI)_{eq,2} \cdot a_2]$$

$$\frac{a_1}{l} = \frac{a_2}{l} = 0,15$$

$$(EI)_{eq} = 2,64 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2 \cdot 0,15 + 4,80 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2 \cdot 0,85$$

$$(EI)_{eq(IBRACON)} = 4,47 \times 10^8 \text{ kN.cm}^2$$

Pode-se verificar que os valores de rigidez equivalente encontrados nos dois métodos são distintos, o valor determinado pelo método do IBRACON (2015) é menor que o encontrado pelo recomendado na NBR 6118:2014. Sendo assim, o IBRACON (2015) é mais conservador.

A.7. CÁLCULO DA FLECHA IMEDIATA

O cálculo da flecha imediata é feito segundo a fórmula abaixo, de acordo com as expressões conhecidas da resistência dos materiais. No caso de vigas apoiadas-engastadas e com carregamento uniformemente distribuído, temos fator $K = 2$.

A.7.1. FLECHA IMEDIATA (NBR 6118:2014)

$$\delta = \frac{K}{384} \frac{pl^4}{(EI)_{eq}} = \frac{2}{384} \frac{0,22 \text{ kN/cm} \cdot (500 \text{ cm})^4}{4,80 \times 10^8 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2} = 0,15 \text{ cm}$$

A.7.2. FLECHA IMEDIATA (IBRACON, 2015)

$$\delta = \frac{K}{384} \frac{pl^4}{(EI)_{eq}} = \frac{2}{384} \frac{0,22 \text{ kN/cm} \cdot (500 \text{ cm})^4}{4,47 \times 10^8 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2} = 0,16 \text{ cm}$$

Nota-se uma pequena diferença entre os valores de flecha. Vale ressaltar que nas situações em que a seção do vão não atingir o momento de fissuração, mas a seção do apoio atingir, pode-se superestimar o valor da rigidez equivalente, resultando em flechas menores.

A.8. CÁLCULO DA FLECHA DIFERIDA

Conforme considerações da norma brasileira, no item 17.3.2.1.2, é dada a tabela dos valores do coeficiente ζ em função do tempo. Para este exemplo será utilizado $t_0 = 0$ e $t \geq 70$ meses, assim, temos $\zeta(t) = 2$. Como na seção em análise não há armadura de compressão, temos o fator $\rho' = 0$.

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) = 2 - 0 = 2$$

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} = \frac{2}{1 + 50 \cdot 0} = 2$$

Assim, considerando a flecha imediata da NBR 6118:2014, a flecha diferida será de:

$$\delta_\infty = (1 + \alpha_f) \cdot \delta = (1 + 2) \cdot 0,15 = 0,45 \text{ cm}$$

A.9. VERIFICAÇÃO DA FLECHA LIMITE

De acordo com o item 13.3 da NBR 6118:2014, a flecha limite para aceitabilidade sensorial, nos casos de deslocamentos visíveis nos elementos estruturais é de $L/250$.

$$\frac{L}{250} = \frac{500 \text{ cm}}{250} = 2,00 \text{ cm}$$

Verifica-se assim, que a flecha diferida calculada, de 0,45cm, está inferior a flecha limite, de 2,00cm, estabelecida na norma brasileira.